Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik
Prof. Georg Hoever

WS 2024/25
11.09.2024

4. Übungsblatt zum Vorkurs Mathematik

Aufgabe 1

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben für die beiden Polynome

$$p(x) \;=\; x^3 - 4x^2 + x + 6 \qquad \text{und} \qquad p(x) \;=\; x^4 - 11x^2 + 18x - 8.$$

a) Berechnen Sie den Wert von p an den Stellen $x = -1$, $x = 1$ und $x = 2$ mit Hilfe des Horner-Schemas.

b) Berechnen Sie $\frac{p(x)}{q(x)}$ zu

$$q(x) = x + 1, \quad q(x) = x - 1, \quad \text{bzw.} \quad q(x) = x - 2.$$

Tipp: Horner Schema, vergleiche a)!

c) Bestimmen Sie sämtliche Nullstellen von p und stellen Sie p als Produkt von Linearfaktoren dar.

Aufgabe 2

Berechnen Sie für $p(x) = 2x^4 - x^3 - 2x + 1$ die Polynomdivision $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ durch

$$q(x) \;=\; x - 1, \qquad q(x) \;=\; x^2 + x + 1 \qquad \text{bzw.} \qquad q(x) \;=\; x^2 + 1.$$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Vielfachheit der Nullstelle 1 des Polynoms

$$p(x) \;=\; x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2.$$

Aufgabe 4

Die folgenden Polynome lassen sich vollständig in Linearfaktoren mit ganzzahligen Nullstellen zerlegen (das brauchen Sie nicht zu zeigen):

a) $p(x) \;=\; x^3 - 7x^2 - 10x + 16,$

b) $p(x) \;=\; x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 16x + 5,$

c) $p(x) \;=\; 5x^3 - 35x + 30.$

Entscheiden Sie, ob 1, 3, -3, 5 oder 8 jeweils Nullstellen von p sind. Welche Werte müssen Sie tatsächlich einsetzen?

Aufgabe 5

Ist die folgende Aussage richtig oder falsch?

> Hat ein Polynom dritten Grades zwei Nullstellen,
> so gibt es auch eine dritte Nullstelle.

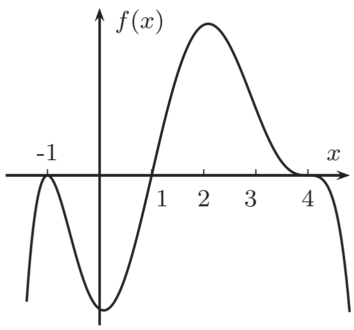
Aufgabe 6

Die in der Skizze dargestellte Funktion hat die Gestalt

$$f(x) \;=\; a \cdot (x+1)^{p_1}(x-1)^{p_2}(x-4)^{p_3}$$

mit einem Vorfaktor a, der gleich plus oder minus Eins ist, und mit Exponenten p_k, die gleich 1, 2 oder 3 sind.

Wie lautet die korrekte Darstellung von f?



Aufgabe 7

Skizzieren Sie die Funktionsgrafen zu

a) $f(x) \;=\; (x+2)^2 \cdot (x-1)^2 \cdot (x-3)$,

b) $f(x) \;=\; -x^3 + 2x^2$,

c) $f(x) \;=\; x^3 + x^2 - 4x - 4$,

d) $h(y) \;=\; -2y^3 - 8y^2 - 6y$.

Aufgabe 8

Zerlegen Sie die folgenden gebrochen rationalen Ausdrücke in die Summe eines Polynoms und einer echt gebrochen rationalen Funktion:

a) $\dfrac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 + 1}$,

b) $\dfrac{2x^4 - x^3 + 2x^2 - 1}{x^2 + 2x + 3}$,

c) $\dfrac{x^3 + 1}{x^3 + 2x + 4}$.

Aufgabe 9

Geben Sie (ohne Gebrauch eines Taschenrechners) jeweils zwei ganze Zahlen an, zwischen denen die folgenden Werte liegen:

$$\sqrt{20}, \qquad \sqrt{80}, \qquad \sqrt[3]{20} \qquad \sqrt[3]{80}, \qquad \sqrt[5]{100}.$$

Aufgabe 10

Bestimmen Sie die reellen Werte x, für die gilt:

a) $\sqrt{2+3x} \;=\; 2,$ b) $\sqrt{x-2} \;=\; \frac{1}{3}x,$

c) $\sqrt{1-x} \;=\; x-2,$ d) $\sqrt{32-16x} \;=\; x-5,$

e) $\sqrt{x+2} \;=\; x,$ f) $\sqrt{8-4x} \;=\; x-3.$

(Beachten Sie, dass Quadrieren keine Äquivalenzumformung ist; es können sich „falsche Lösungen“ einschleichen!)

Aufgabe 11

Gibt es Zahlen $a, b > 0$ mit

$$\sqrt{a+b} \;=\; \sqrt{a} + \sqrt{b}\,?$$

Aufgabe 12

Für welche Variablenwerte sind die folgenden Gleichungen erfüllt?

a) $\sqrt[5]{x^3+5} \;=\; 2,$ b) $\sqrt[4]{s+2} \;=\; \sqrt{s},$

c) $\sqrt[3]{a^3+7} - a \;=\; 1,$ d) $\sqrt{2c-2} \;=\; 1+\sqrt{c}.$