Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

WS 2023/24
22.09.2023

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Die Aufgaben entstammen meinem Buch *Vorkurs Mathematik*, Springer-Verlag

11. Übungsblatt zum Vorkurs Mathematik

Aufgabe 1

Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{a} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$.

a) Berechnen Sie $\|\vec{a}\|$.

b) Berechnen Sie $\|5\vec{a}\|$ und $\| - 2\vec{a}\|$ einerseits, indem Sie zunächst die entsprechenden Vektoren $5\vec{a}$ und $-2\vec{a}$ und dann deren Norm berechnen und andererseits mit Hilfe von Satz 4.4.4.

c) Oft will man zu einem Vektor $\vec{a}$ einen *normalisierten* Vektor haben, d.h. einen Vektor $\vec{b}$, der in die gleiche Richtung wie $\vec{a}$ zeigt und die Länge 1 hat.

   Geben Sie jeweils einen normalisierten Vektor $\vec{b}$ zu den angegebenen $\vec{a}$ an. Wie muss man dazu allgemein λ wählen?

Aufgabe 2

Welchen Abstand haben

a) die Punkte $P_1 = (1, 3)$ und $P_2 = (4, -1)$ im $\mathbb{R}^2$,

b) die Punkte $Q_1 = (1, 1, -1)$ und $Q_2 = (0, 0, 1)$ im $\mathbb{R}^3$?

Aufgabe 3

Gegeben ist die Gerade $g = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

a) Welche Punkte auf der Geraden g haben

   a1) von $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ den Abstand 3, a2) von $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)$ den Abstand 5?

b) Welcher Punkt auf der Geraden g liegt am nächsten an $R = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -6 \end{smallmatrix}\right)$?

   Berechnen Sie dazu den Abstand $d(\lambda)$ von R zu einem allgemeinen Punkt der Geraden g in Abhängigkeit von dem Parameter λ und bestimmen Sie die Minimalstelle der Funktion $d(\lambda)$.

Aufgabe 4

Berechnen Sie die folgenden Skalarprodukte.

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, e) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Bei welchen Produkten erhält man Null? Wie sehen die entsprechenden Vektoren aus?

Aufgabe 5

Berechnen Sie (wo nötig unter Benutzung eines Taschenrechners) den Winkel, den die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ einschließen.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$,

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

e) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, f) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Zeichnen Sie die Vektoren bei a) bis d) und messen Sie die berechneten Werte nach.

Aufgabe 6

Geben Sie orthogonale Vektoren an zu

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Überlegen Sie auch anschaulich, welche Vektoren in Frage kommen.

Aufgabe 7

Berechnen Sie die folgenden Vektorprodukte und prüfen Sie nach, dass das Ergebnis senkrecht auf den ursprünglichen Vektoren steht.

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Versuchen Sie, sich die Vektoren und das Ergebnis vorzustellen.

Aufgabe 8

Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie den Winkel φ zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit Hilfe des Skalarprodukts.

b) Berechnen Sie $\vec{a} \times \vec{b}$.

c) Verifizieren Sie die Gleichung $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin \varphi$.

Aufgabe 9

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms, das durch $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird,

a) durch die Formel „Seite mal Höhe“, wobei Sie die Höhe berechnen, indem Sie vom Punkt $B = (2, 3)$ das Lot auf die Seite, die durch $\vec{a}$ gegeben ist, fällen,

b) durch die Formel „Seite mal Höhe“, indem Sie mit dem Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die Höhe berechnen,

c) indem Sie die Situation ins Dreidimensionale übertragen und das Vektorprodukt zu Hilfe nehmen.