Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

WS 2024/25
19.09.2024

Die Aufgaben entstammen meinem Buch *Vorkurs Mathematik*, Springer-Verlag

10. Übungsblatt zum Vorkurs Mathematik

Aufgabe 1

a) Zeichnen Sie die Punkte $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $S = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und die zugehörigen Ortsvektoren $\vec{p}$, $\vec{q}$ und $\vec{s}$.

b) Was ergibt $\vec{p} + \vec{q}$, was $\vec{p} - \vec{s}$?

c) Welcher Vektor führt von P zu S, welcher von Q zu P?

d) Bestimmen und zeichnen Sie $2 \cdot \vec{p}$, $-\frac{1}{2} \cdot \vec{p}$, $2 \cdot (\vec{p} + \vec{q})$.

e) Wie erhält man den Punkt T, der genau zwischen P und Q liegt?

Aufgabe 2

Berechnen Sie

$$\vec{a} + \vec{b}, \qquad \vec{a} - \vec{b}, \qquad -\vec{a}, \qquad 3\vec{b}, \qquad 2 \cdot (\vec{a} + \vec{b}), \qquad 2\vec{a} + 2\vec{b}$$

für die folgenden Fälle:

a) im Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Zeichnen Sie die Vektoren.

b) im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Versuchen Sie, sich die Vektoren vorzustellen.

Aufgabe 3

a) Stellen Sie die Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ dar.

Zeichnen Sie die Situation.

b) Stellen Sie $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dar. Versuchen Sie, sich die Situation vorzustellen.

Aufgabe 4

Ein Roboter kann auf einer Schiene entlang der x-Achse fahren und hat einen diagonalen Greifarm (Richtung $\binom{1}{1}$), den er aus- und einfahren kann.

In welcher Position muss der Roboter stehen, um einen Gegenstand bei $\binom{1}{3}$ zu fassen?

Formulieren Sie das Problem mittels Linearkombination von Vektoren.

Aufgabe 5

Sei g_1 die Gerade durch die Punkte $P_1 = (-2, -1)$ und $P_2 = (2, 2)$ und g_2 die Gerade durch die Punkte $Q_1 = (2, -1)$ und $Q_2 = (0, 3)$.

a) Stellen Sie Geradengleichungen für g_1 und g_2 in vektorieller Form auf.

b) Geben Sie alternative Darstellungen (mit anderen Orts- und/oder anderen Richtungsvektoren) für g_1 an.

c) Liegt der Punkt $(1, 1)$ auf der Geraden g_1 bzw. auf g_2?

d) Berechnen Sie den Schnittpunkt von g_1 und g_2.

e) Wird g_1 bzw. g_2 auch dargestellt durch

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} | \lambda \in \mathbb{R} \right\}?$$

Was müssen Sie dazu alles überprüfen?

f) Beschreiben Sie die Geraden in funktionaler Form $y = m \cdot x + a$, und lösen Sie mit dieser Darstellung c) und d).

Zeichnen Sie die Situation.

Aufgabe 6

Sei g_1 die Gerade im $\mathbb{R}^3$ durch die Punkte $P_1 = (0, 1, 0)$ und $P_2 = (0, 1, 3)$ und g_2 die Gerade durch die Punkte $Q_1 = (-1, 1, -1)$ und $Q_2 = (2, 0, 3)$.

a) Stellen Sie Geradengleichungen für g_1 und g_2 in vektorieller Form auf.

b) Geben Sie alternative Darstellungen (mit anderen Orts- und/oder anderen Richtungsvektoren) für g_1 an.

c) Liegt der Punkt $(0, 1, 1)$ auf g_1 bzw. auf g_2?

d) Schneiden sich g_1 und g_2?

e) Wird g_1 bzw. g_2 auch dargestellt durch

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}?$$

Was müssen Sie dazu alles überprüfen?

Versuchen Sie, sich die Situation vorzustellen.

Aufgabe 7

Sei E die Ebene durch die Punkte

$$P_1 = (2,1,0), \qquad P_2 = (0,1,3) \qquad \text{und} \qquad P_3 = (2,0,3).$$

a) Geben Sie mehrere Parameterdarstellungen (mit verschiedenen Orts- bzw. Richtungsvektoren) für E an.

b) Wird die Ebene E auch beschrieben durch

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \right\}?$$

Was müssen Sie dazu alles überprüfen?

Aufgabe 8

Berechnen Sie die Schnittmenge von

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

mit der Geraden

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$