Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik
Prof. Georg Hoever

SS 2024
18.04.2024

4. Übungsblatt zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2 für (Wirtschafts-)Informatik

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen zu

a) $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3,\ f(x_1,x_2,x_3,x_4) \;=\; \begin{pmatrix} x_1x_2\,\mathrm{e}^{x_3} \\ x_2x_3x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$,

b) $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4,\ g(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x \\ xy \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2

Wie lautet die Jacobi-Matrix zu

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\ f(x) \;=\; Ax \quad \text{mit} \quad A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}?$$

Aufgabe 3

Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y) \;=\; x^2y+x-y^2$.

a) Geben Sie mit Hilfe der linearen Approximation eine Tangentenebene an f um den Punkt $(2,3)$ an.

b) Geben Sie mit Hilfe der linearen Approximation eine Näherung für die Funktionsänderung $\Delta f = f(2+\Delta x, 3+\Delta y) - f(2,3)$ in Abhängigkeit von Δx und Δy an.

c) Wie groß ist die Abweichung bei der Funktion f bzw. durch die Näherungen aus a) bzw. b), wenn man statt $(2,3)$ die Stellen $(2.1,3)$ bzw. $(2.05,3.2)$ einsetzt?

d) Nutzen Sie die Näherung aus b), um abzuschätzen, wie groß der Fehler maximal ist, wenn man statt $(x_0,y_0)=(2,3)$ die Stelle $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ mit $|\Delta x|\leq 0.1$ und $|\Delta y|\leq 0.2$ einsetzt.

e) Erklären Sie das lineare Fehlerfortpflanzungsgesetz:

> Sei $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)$. Sind die Größen x_k mit Fehlern oder Ungenauigkeiten versehen, die maximal $|\Delta x_k|$ betragen ($k=1,\dots,n$), so erhält man bei Einsetzen von $\mathbf{x}$ in eine differenzierbare Funktion $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ einen maximalen Fehler von ungefähr
>
> $$|\Delta f| \;\leq\; \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x})\right|\cdot|\Delta x_1| + \ldots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x})\right|\cdot|\Delta x_n|.$$

Aufgabe 4 (beispielhafte Klausuraufgabe, 12 Minuten)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x^3y^3 - 2y \\ x \end{pmatrix}$.

Gesucht ist eine Stelle (x, y) mit $f(\binom{x}{y}) = \binom{0}{2}$. Führen Sie dazu ausgehend vom Punkt $\mathbf{x}^{(0)} = \binom{1}{1}$ zwei Schritte des (mehrdimensionalen) Newton-Verfahrens durch.

Aufgabe 5

Ein Zylinder rollt auf einer ebenen Platte.

a) Stellen Sie eine Formel für die Kurve auf, die ein Punkt am Rand des Zylinders beschreibt.
Anleitung: Betrachten Sie das Problem im Zweidimensionalen. Setzen Sie die Bewegung zusammen aus der Drehbewegung um den Zylindermittelpunkt und der Längsbewegung des Zylinders.

b) Welche Bewegungsrichtung hat der Punkt in dem Moment, in dem er die Platte berührt?

Aufgabe 6 (beispielhafte Klausuraufgabe, 12 Minuten)

Gegeben ist die Kurve $f : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = \begin{pmatrix} t \cdot \cos t \\ t \cdot \sin t \end{pmatrix}$.

a) Es ist $f(0) = \binom{0}{0}$. In welche Richtung verlässt die Kurve bei wachsendem t diesen Punkt?

b) Stellen Sie eine Gleichung für die Tangente an die Kurve zu $t = 2\pi$ auf.

c) Skizzieren Sie die Kurve für $t \in [0, 7]$; berücksichtigen Sie dabei Ihre Ergebnisse von a) und b). Kennzeichnen Sie wichtige Punkte im Koordinatensystem.

Aufgabe 7

a) Leiten Sie her, dass die Länge L einer durch eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ dargestellten Kurve berechnet werden kann durch $L = \int\limits_a^b ||f'(t)||\, \mathrm{d}t$.

   Anleitung:

   1) Approximieren Sie die Kurve durch einen Streckzug zwischen Punkten $f(t_i)$ mit $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$.

   2) Berechnen Sie die Länge der einzelnen Strecken näherungsweise mit Hilfe der Ableitung.

   3) Erklären Sie, wie sich das behauptete Integral ergibt.

b) Nutzen Sie die Formel aus a), um die Länge des Kreisbogens zu berechnen, der durch $f : [0, \alpha] \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ gegeben ist.