

4. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik 2 für (Wirtschafts-)Informatik

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen zu

a) $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 e^{x_3} \\ x_2 x_3 x_4 \\ x_4 \end{pmatrix},$

b) $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4, g(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x \\ xy \end{pmatrix}.$

Aufgabe 2

Wie lautet die Jacobi-Matrix zu

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x) = Ax \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}?$$

Aufgabe 3

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 y + x - y^2.$

- a) Geben Sie mit Hilfe der linearen Approximation eine Tangentenebene an f um den Punkt $(2, 3)$ an.
- b) Geben Sie mit Hilfe der linearen Approximation eine Näherung für die Funktionsänderung $\Delta f = f(2 + \Delta x, 3 + \Delta y) - f(2, 3)$ in Abhängigkeit von Δx und Δy an.
- c) Wie groß ist die Abweichung bei der Funktion f bzw. durch die Näherungen aus a) bzw. b), wenn man statt $(2, 3)$ die Stellen $(2.1, 3)$ bzw. $(2.05, 3.2)$ einsetzt?
- d) Nutzen Sie die Näherung aus b), um abzuschätzen, wie groß der Fehler maximal ist, wenn man statt $(x_0, y_0) = (2, 3)$ die Stelle $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ mit $|\Delta x| \leq 0.1$ und $|\Delta y| \leq 0.2$ einsetzt.
- e) Erklären Sie das lineare Fehlerfortpflanzungsgesetz:

Sei $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Sind die Größen x_k mit Fehlern oder Ungenauigkeiten versehen, die maximal $|\Delta x_k|$ betragen ($k = 1, \dots, n$), so erhält man bei Einsetzen von \mathbf{x} in eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ einen maximalen Fehler von ungefähr

$$|\Delta f| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \right| \cdot |\Delta x_1| + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right| \cdot |\Delta x_n|.$$

Aufgabe 4 (beispielhafte Klausuraufgabe, 12 Minuten)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x^3 y^3 - 2y \\ x \end{pmatrix}$.

Gesucht ist eine Stelle (x, y) mit $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Führen Sie dazu ausgehend vom Punkt $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zwei Schritte des (mehrdimensionalen) Newton-Verfahrens durch.

Aufgabe 5

Ein Zylinder rollt auf einer ebenen Platte.

- a) Stellen Sie eine Formel für die Kurve auf, die ein Punkt am Rand des Zylinders beschreibt.

Anleitung: Betrachten Sie das Problem im Zweidimensionalen. Setzen Sie die Bewegung zusammen aus der Drehbewegung um den Zylindermittelpunkt und der Längsbewegung des Zylinders.

- b) Welche Bewegungsrichtung hat der Punkt in dem Moment, in dem er die Platte berührt?

Aufgabe 6 (beispielhafte Klausuraufgabe, 12 Minuten)

Gegeben ist die Kurve $f : \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = \begin{pmatrix} t \cdot \cos t \\ t \cdot \sin t \end{pmatrix}$.

- a) Es ist $f(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. In welche Richtung verlässt die Kurve bei wachsendem t diesen Punkt?
- b) Stellen Sie eine Gleichung für die Tangente an die Kurve zu $t = 2\pi$ auf.
- c) Skizzieren Sie die Kurve für $t \in [0, 7]$; berücksichtigen Sie dabei Ihre Ergebnisse von a) und b). Kennzeichnen Sie wichtige Punkte im Koordinatensystem.

Aufgabe 7

- a) Leiten Sie her, dass die Länge L einer durch eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dargestellten Kurve berechnet werden kann durch $L = \int_a^b \|f'(t)\| dt$.

Anleitung:

- 1) Approximieren Sie die Kurve durch einen Streckzug zwischen Punkten $f(t_i)$ mit $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$.
 - 2) Berechnen Sie die Länge der einzelnen Strecken näherungsweise mit Hilfe der Ableitung.
 - 3) Erklären Sie, wie sich das behauptete Integral ergibt.
- b) Nutzen Sie die Formel aus a), um die Länge des Kreisbogens zu berechnen, der durch $f : [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ gegeben ist.