

2. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik 2 für (Wirtschafts-)Informatik

Aufgabe 1

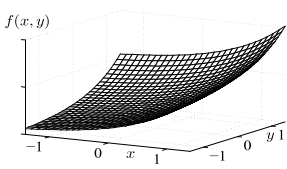
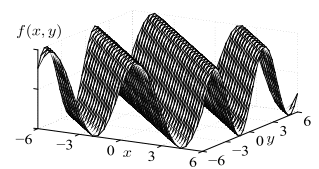
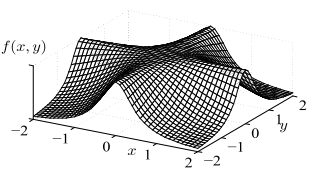
Betrachtet werden die folgenden Funktionen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x, y) = y \cdot e^{xy}, \quad g(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

- a) Wie lauten die in Polarkoordinaten ausgedrückten Funktionsvorschriften?
- b) Machen Sie sich mit Hilfe der partiellen Funktionen bzw. mit Hilfe der Polarkoordinaten-Ausdrücke ein Bild zu den Funktionsgrafem.

Aufgabe 2 (beispielhafte Klausuraufgabe, 6 Minuten)

Welche Funktion erzeugt das darüber stehende „Funktionsgebirge“?

<p>a)</p> 	<p>b)</p> 	<p>c)</p> 
$f_1(x, y) = e^{xy}$ $f_2(x, y) = e^{x+y}$ $f_3(x, y) = e^x + e^y$	$g_1(x, y) = \sin(x + y)$ $g_2(x, y) = \sin \sqrt{x^2 + y^2}$ $g_3(x, y) = \sin x + \sin y$	$h_1(x, y) = \frac{1}{(x + y)^2 + 1}$ $h_2(x, y) = \frac{1}{(x \cdot y)^2 + 1}$ $h_3(x, y) = \frac{1}{(x + y + 1)^2}$

Aufgabe 3

Versuchen Sie, sich die Funktionsgrafem zu den durch die folgenden Ausdrücke in Polarkoordinaten gegebenen Funktionen als Flächen vorzustellen.

- a) $f(r, \varphi) = \frac{1}{r}$, b) $g(r, \varphi) = r \cdot \sin \varphi$,
- c) $h(r, \varphi) = r \cdot \sin \frac{\varphi}{2}$, mit $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Aufgabe 4

Berechnen Sie zu den folgenden Funktionen sämtliche partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung.

a) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = \frac{x^2 y}{z^2 + 1}.$

b) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = e^{xy} \cdot \sin(x^2 + y).$

Aufgabe 5

Zu zwei Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ wird das Skalarprodukt $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$ betrachtet. Berechnen Sie grad $f(\mathbf{x})$ zu den folgenden Funktionen:

a) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$ zu fest gewähltem $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.

b) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}.$

c) Zu einer symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und einem Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ kann man die quadratische Form $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ bilden. Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sehen Sie einen Zusammenhang zwischen A und grad $f(\mathbf{x})$?

Aufgabe 6

Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = x^2 \cdot \sin(yz).$

Berechnen Sie den Gradienten zu f an der Stelle $(x_0, y_0, z_0) = (2, 1, 3)$ näherungsweise, indem Sie jeweils numerische Ableitungen nutzen, d.h. entsprechende Differenzenquotienten, mit $h = 0.1$.

Wie lautet der Gradient an der Stelle exakt?

(Nutzen Sie einen Taschenrechner!)