FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

SS 2025
27.03.2025

1. Übungsblatt, Teil 2, zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2 für (Wirtschafts-)Informatik

Aufgabe 1

Sei M die Menge aller Menschen. Auf M werden zwei Relationen definiert:

a) $m_1 \cong m_2 \quad \Leftrightarrow \quad m_1$ hat den gleichen Geburtstag wie m_2.

b) $m_1 \lhd m_2 \quad \Leftrightarrow \quad m_2$ stammt von m_1 ab.

(Abstammung sei dabei so aufgefasst, dass jeder auch von sich selbst abstammt).

Überlegen Sie sich, ob die Relationen reflexiv, transitiv, symmetrisch und/oder antisymmetrisch sind.

Sind es Äquivalenz- oder Ordnungsrelationen? Was sind die Äquivalenzklassen/wieviele gibt es? Liegt ggf. eine totale Ordnung vor?

Aufgabe 2

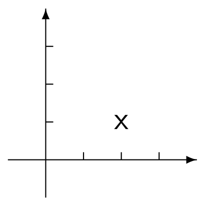
Auf $\mathbb{R}^2$ werden drei Relationen definiert:

1. $(x_1, y_1) \leq_1 (x_2, y_2) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \leq x_2$ oder $y_1 \leq y_2$.
2. $(x_1, y_1) \leq_2 (x_2, y_2) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \leq x_2$ und $y_1 \leq y_2$.
3. $(x_1, y_1) \leq_3 (x_2, y_2) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 < x_2$ oder $(x_1 = x_2$ und $y_1 \leq y_2)$.

   $\leq_3$ heißt auch *lexikografische Ordnung* (warum?)

a) Skizzieren Sie, für welche Punkte $P = (x, y)$ gilt

$$(2,1) \leq_1 P \quad \text{bzw.} \quad (2,1) \leq_2 P \quad \text{bzw.} \quad (2,1) \leq_3 P.$$



b) Welche der Relationen stellen Ordnungsrelationen dar?
Wird sogar eine totale Ordnung definiert?

Aufgabe 3

Auf $\mathbb{Z}$ wird eine Relation „$\equiv_5$“ (lies „kongruent modulo 5“) definiert durch

$$a \equiv_5 b \quad :\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} : a \;=\; b + k \cdot 5.$$

Man schreibt auch „$a \equiv b \bmod 5$“ oder „$a = b \bmod 5$“, entspr. für beliebiges $m \in \mathbb{N}$.

(Man kann sich überlegen, dass zwei natürliche Zahlen genau dann kongruent modulo 5 sind, wenn sie bei Division durch 5 den gleichen Rest lassen.)

a) Zeigen Sie, dass „$\equiv_5$“ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ ist.

b) Was sind die Äquivalenzklassen, die „$\equiv_5$“ erzeugt? Wie viele gibt es?

Aufgabe 4

Sei G die Menge aller Studiengänge der FH Aachen, S die Menge aller Studierender und B die Menge der Bücher in der Bibliothek.

> Die Relation $R_1 \subseteq G \times S$ beschreibe, in welchen Studiengängen welche Studierende eingeschrieben sind.
>
> Die Relation $R_2 \subseteq S \times B$ beschreibe, welche Studierende irgendwann mal welche Bücher ausgeliehen haben.

Welche Semantik hat $R_2 \circ R_1$?

Aufgabe 5 (entspricht ehemaliger Klausuraufgabe)

Sei $\mathbb{Z}_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und R eine Relation auf $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$, definiert durch

$$R = \{(2,5); (3,4); (4,1); (4,4); (5,1); (5,3)\}.$$

a) Bestimmen Sie R^2, R^3 und R^4.

b) Wie lautet der transitive Abschluss R^+ von R?

Aufgabe 6

Die Relation R sei auf der Menge der Menschen definiert durch

$$(m_1, m_2) \in R \;:\Leftrightarrow\; m_2 \text{ ist Vater oder Mutter von } m_1.$$

Wie kann man den transitiven Abschluss R^+ anschaulich beschreiben?

Aufgabe 7

Zu einer auf $\mathbb{Z}_n = \{1, \ldots, n\}$ gegebenen Relation R kann man die $(n \times n)$-Matrix A_R betrachten, für die $a_{ij} = 1$ ist, falls $(i, j) \in R$ ist, ansonsten $a_{ij} = 0$.

a) Bestimmen Sie A_R zur Relation R auf $\mathbb{Z}_4$, die gegeben ist durch

$$R = \{(1,2); (1,4); (2,2); (2,3); (3,4); (4,3)\}.$$

b) Berechnen Sie zu R bzw. A_R aus a) einerseits R^2 und andererseits A_R^2 $(= A_R \cdot A_R)$. Was fällt auf?

Aufgabe 8

Sei $\Sigma = \{\text{a,b}\}$ und Σ^* die Menge aller aus Σ bildbaren Worte.

a) Ein Wort $w \in \Sigma^*$ stehe in Relation zu den Worten wa und $w$ba.

   Schreiben Sie sämtliche Worte auf, die aus maximal vier Zeichen bestehen (inklusive dem leeren Wort „“$\in \Sigma^*$), und skizzieren Sie in dieser Teilmenge die angegebene Relation.

b) Das leere Wort „“ sei ein gültiges Wort und, falls w ein gültiges Wort ist, so sollen auch wa und $w$ba gültige Worte sein.

   1) Welche der in a) aufgelisteten Worte sind gültige Worte?

   2) Zeigen Sie (durch Induktion bzgl. des Bildungsprinzips):

      Für ein gültiges Wort w gilt:

      $$w = \text{„“} \quad \text{oder} \quad w \text{ endet auf 'a' und besitzt kein Doppel-'b'}.$$