FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

SS 2024
03.04.2024

1. Übungsblatt, Teil 1, zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2 für (Wirtschafts-)Informatik

Aufgabe 1 (beispielhafte Klausuraufgabe, 8 Minuten)

Die Folge a_n, $n \in \mathbb{N}_0$, sei definiert durch $a_0 = 0$ und $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 1)$.

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $a_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Aufgabe 2

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion: Für $q \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ gilt: $2^n < n!$.

Aufgabe 4

Seien $a_1, a_2, \ldots$ rekursiv definiert durch $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \dfrac{1}{\frac{1}{a_n} + 1}$.

Welchen Wert hat a_n? Stellen Sie eine Vermutung auf und beweisen Sie diese.

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass für die n-te Ableitung $f^{(n)}$ der Funktion $f(x) = x \cdot \mathrm{e}^x$ gilt:

$$f^{(n)}(x) = x \cdot \mathrm{e}^x + n \cdot e^x.$$

Aufgabe 6

Die Fibonacci-Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist definiert durch

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1 \quad \text{und für } n > 1 \text{ durch} \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}.$$

a) Berechnen Sie die ersten Folgenglieder.

b) Zeigen Sie: $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(x_1^n - x_2^n\right)$ mit $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Tipp: x_1 und x_2 sind Lösungen von $x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$, $n \geq 2$.
(Warum?)

Aufgabe 7

Die nebenstehende Funktion (in C-ähnlichem Pseudocode) soll zu gegebenem $n \in \mathbb{N}$ den Wert

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!}$$

berechnen.

Verifizieren Sie durch induktions-ähnliche Überlegungen, dass der Wert von `add` am Ende des k-ten Durchlaufs der `FOR`-Schleife gleich $\frac{2^k}{k!}$ ist, und dass die Funktion korrekt arbeitet.

```
function f(n:integer):integer
{
   add := 1;
   summe := 1;
   FOR k:=1 TO n DO
   {
      add := add*2/k;
      summe := summe+add;
   }
   return summe;
}
```

Aufgabe 8

Sei $\mathbb{Z}_{12} = \{1, 2, \ldots, 12\}$ und R eine Relation auf $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{12}$, definiert durch

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{12} | x \text{ teilt } y\}.$$

(Dabei bedeutet „x teilt y“: $\exists n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot x = y$, also z.B. „1 teilt 5“ oder „5 teilt 5“).

a) Welche Elemente besitzt R?

b) Ist R reflexiv, transitiv, symmetrisch und/oder antisymmetrisch?

Aufgabe 9

Sei $\mathbb{Z}_6 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und R eine Relation auf $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$, definiert durch

$$R = \{(1, 1); (1, 6); (2, 5); (3, 4); (4, 3); (5, 1)\}.$$

a) Begründen Sie, dass R weder reflexiv noch transitiv noch symmetrisch noch antisymmetrisch ist.

b) Welche Relationspaare muss man hinzufügen, damit R reflexiv ist?

c) Welche Relationspaare muss man hinzufügen, damit R symmetrisch ist?

d) Welche Relationspaare muss man hinzufügen, damit R transitiv ist?

e) Definiert R eine Funktion?

Aufgabe 10

Sei M die Menge aller stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0, 1]$,

$$M = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\}$$

und die Relation R auf M definiert durch

$$f\,R\,g \quad :\Leftrightarrow \quad \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ist R reflexiv, transitiv, symmetrisch und/oder antisymmetrisch?