

9. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik 2 für Elektrotechnik

Aufgabe 1

Beschreibt $u(x, t)$ die Auslenkung eines (gespannten) Seils am Ort x zur Zeit t , so erfüllt u die partielle Differenzialgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = c \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) \quad (c > 0).$$

- a) Für welche a sind Funktionen der Form $u(x, t) = \sin(x - at)$ Lösungen?

Überlegen Sie sich, dass allgemein bei einer beliebigen (zweimal differenzierbaren) Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion $u(x, t) = g(x - at)$ mit entsprechendem a eine Lösung ist.

- b) Wie kann man sich den zeitlichen Verlauf der Lösungsfunktionen in a) vorstellen?
c) Rechnen Sie nach, dass die Funktionen

$$u_n(x, t) = \sin(nx) \cos\left(\frac{n}{\sqrt{c}}t\right)$$

Lösungen sind, und dass auch jede Linearkombination

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N \lambda_n u_n(x, t) = \lambda_1 u_1(x, t) + \lambda_2 u_2(x, t) + \dots + \lambda_N u_N(x, t)$$

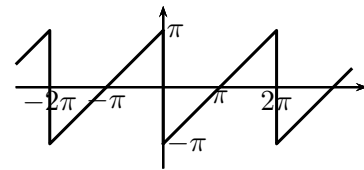
($\lambda_n \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$ beliebig) eine Lösung ist, wobei jeweils die Randbedingung $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ erfüllt ist (d.h., das Seil ist an den Stellen $x = 0$ und $x = \pi$ fixiert).

Aufgabe 2

- a) Welche Funktionen werden durch die folgenden Fourierkoeffizienten beschrieben? Nutzen Sie ein Applet zur Fouriersynthese (s. die Links auf meiner Internetseite).

	a_0	a_1 b_1	a_2 b_2	a_3 b_3	a_4 b_4	a_5 b_5	a_6 b_6	a_7 b_7	a_8 b_8	a_9 b_9	a_{10} b_{10}
1)	0.95	0.06 0.91	-0.80 0.11	-0.13 -0.62	0.42 -0.12	0.08 0.21	-0.04 0.02	0.05 0.08	-0.15 0.10	-0.12 -0.17	0.14 -0.12
2)	-0.5	0.64 1.00	0.00 0.50	0.07 0.33	0.00 0.25	0.03 0.20	0.00 0.17	0.01 0.14	0.00 0.12	0.01 0.11	0.00 0.10
3)	-0.36	0.00 1.00	0.25 0.00	0.00 -0.11	-0.06 0.00	0.00 0.04	0.03 0.00	0.00 -0.02	-0.02 0.00	0.00 0.01	0.01 0.00

- b) Wie muss man die Fourierkoeffizienten einstellen, um (annähernd) den nebenstehenden Funktionsverlauf zu erhalten? (Vgl. Aufgabe 3.)



Aufgabe 3

- a) Bestimmen Sie die Fourierreihe zu $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \pi$.
- b) Nutzen Sie einen Funktionsplotter, um sich ein Bild der ersten Teilsummen zu der Fourierreihe aus a) zu machen.
- c) Ein RC -Tiefpass (ohne Betrachtung der Einheiten, mit $RC = 1$) führt bei einem Eingangssignal $u_{e,\omega}(t) = \sin(\omega t)$ zu einem Ausgangssignal $u_{a,\omega}(t)$ mit

$$u_{a,\omega}(t) = -\frac{\omega}{1 + \omega^2} \cos(\omega t) + \frac{1}{1 + \omega^2} \sin(\omega t)$$

(vgl. Blatt 8, Aufgabe 3). Wie lautet das Ausgangssignal $y(t)$ bei einer Sägezahnförmigen 2π -periodischen Eingangsspannung mit $x(t) = t - \pi$, $t \in [0, 2\pi]$?

Stellen Sie dazu $y(t)$ als Fourierreihe dar, indem Sie das Eingangssignal Fourierzerlegen (vgl. a)) und $y(t)$ als Überlagerung der entsprechenden Ausgangssignale betrachten.

Aufgabe 4

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine 2π -periodische Funktion und a_n und b_n die üblichen Fourierkoeffizienten (bei Integration von 0 bis 2π).

- a) Überlegen Sie sich, dass man beim Integrationsintervall $[-\pi, \pi]$, also bei

$$\tilde{a}_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{und} \quad \tilde{b}_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

die gleichen Koeffizienten erhält: $a_n = \tilde{a}_n$ und $b_n = \tilde{b}_n$.

(Dies gilt sogar allgemein bei jedem Integrationsintervall der Länge 2π .)

- b) Zeigen Sie:

- 1) Ist f eine gerade Funktion, so gilt $b_n = 0$ für alle n .
- 2) Ist f eine ungerade Funktion, so gilt $a_n = 0$ für alle n .

(Tipp: Benutzen Sie entsprechend a) das Intervall $[-\pi, \pi]$.)