FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

SS 2026
26.05.2026

8. Übungsblatt zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2 für Elektrotechnik

Aufgabe 1

Die Spannung u_C an dem Kondensator in einem Schwingkreis mit der Kapazität C, der Induktivität L und dem Widerstand R wird gegeben durch die Differenzialgleichung

$$u_C''(t) + \frac{R}{L} \cdot u_C'(t) + \frac{1}{LC} \cdot u_C(t) \;=\; 0.$$

a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung für $C = 100\mu\,\mathrm{F}$, $L = 10m\,\mathrm{H}$ und

   i) $R = 10\Omega$,

   ii) $R = 20\Omega$,

   iii) $R = 50\Omega$.

b) Für welchen Wert von R aus a) klingen die Lösungen am schnellsten ab?

Aufgabe 2

Ein Schwingkreis mit der Kapazität C, der Induktivität L und dem Widerstand R wird mit einer äußeren Spannung

$$U(t) \;=\; \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$$

angeregt. Die Spannung u_C an dem Kondensator wird dann gegeben durch die Differenzialgleichung

$$LC \cdot u_C''(t) + RC \cdot u_C'(t) + u_C(t) \;=\; U(t).$$

Konkret sei

$$C = 100\mu\,\mathrm{F}, \quad L = 10m\,\mathrm{H}, \quad R = 10\Omega, \quad \hat{u} = 2\,\mathrm{V} \quad \text{und} \quad \omega = 2k\,\mathrm{Hz}.$$

a) Bestimmen Sie mit Hilfe einer komplexen Ansatzfunktion $u \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ eine Lösung $u_C(t)$

   i) in der Form $u_C(t) = \hat{u}_1 \sin(\omega t) + \hat{u}_2 \cos(\omega t)$,

   ii) (mit Hilfe eines Taschenrechners) in der Form $u_C(t) = \hat{u}_C \sin(\omega t + \varphi)$.

b) Wie lautet die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung? (Tipp: Aufgabe 1a))

   Wie sieht das zeitliche Verhalten für große t aus?

Fortsetzung von Aufgabe 2

c) Für den Strom $I(t)$ gilt

$$I(t) \;=\; \dot{Q}_C(t) \;=\; C \cdot \dot{u}_C(t) \;=\; C\hat{u}_C\omega\cos(\omega t+\varphi).$$

Er besitzt also die Amplitude $\hat{i} = C\hat{u}_C\omega$.

i) Zeigen Sie, dass man die Stromamplitude allgemein darstellen kann als

$$\hat{i} \;=\; \hat{u} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2 + R^2}}.$$

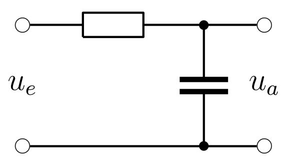
ii) Plotten Sie die Funktion $\hat{i}(\omega)$ aus i) in Abhängigkeit von ω für exemplarische Werte von C, L, R und $\hat{u}$.

Für welches ω ist $\hat{i}$ maximal?

Sehen Sie einen Zusammenhang zu Blatt 7, Aufgabe 2c)?

Aufgabe 3

Ein einfacher Tiefpassfilter besteht aus einem Widerstand und einem Kondensator entsprechend nebenstehender Abbildung.



Bei einer Eingangsspannung $u_e(t)$ gilt für die Spannung $u_a(t)$ am Ausgang die Differenzialgleichung

$$RC \cdot u_a'(t) + u_a(t) \;=\; u_e(t).$$

Betrachtet wird eine Eingangsspannung $u_e(t) = \hat{u}_e \cdot \sin(\omega t)$.

a) Bestimmen Sie mit Hilfe einer komplexen Ansatzfunktion die Ausgangsspannung u_a in der Form $u_a(t) = u_1 \cdot \cos(\omega t) + u_2 \cdot \sin(\omega t)$.

b) Bestimmen Sie die Amplitude $\hat{u}_a$ der Ausgangsspannung in Abhängigkeit von der Frequenz ω.

Plotten Sie die Funktion $\hat{u}_a(\omega)$ und erklären Sie den Begriff „Tiefpassfilter“.

Aufgabe 4

Betrachtet wird ein Räuber-Beute-Modell mit Ressourcenbegrenzung:

Sei $u(t)$ die Populationsgröße der Beutetiere zur Zeit t und $v(t)$ die des entsprechenden Räubers. Dazu wird das Differenzialgleichungssystem

$$\begin{aligned} u' &= u \cdot (2 - v - u) \\ v' &= v \cdot (u - 1 - v) \end{aligned}$$

betrachtet. Zur Zeit $t = 0$ sei $u(0) = v(0) = 0.5$.

Berechnen Sie mit dem Euler-Verfahren zur Schrittweite $h = 0.1$ Näherungen für $u(0.3)$ und $v(0.3)$.

(Sie können auch ein Programm zur numerischen Lösung des Problems schreiben.)

Aufgabe 5

Betrachtet wird die Differenzialgleichung dritter Ordnung

$$y''' = 2xy'y'' + 2y^2y'$$

mit den Anfangswerten

$$y(1) = 1, \quad y'(1) = -1, \quad y''(1) = 2.$$

a) Transformieren Sie die Differenzialgleichung inklusive der Anfangsbedingung in ein Differenzialgleichungssystem erster Ordnung.

b) Führen Sie zwei Schritte des Euler-Verfahrens mit der Schrittweite $h = 0.1$ aus.