

## 7. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik 2 für Elektrotechnik

### Aufgabe 1

Die Temperatur  $T(t)$  in einem Gewächshaus soll durch einen P-Regler (proportional-Regler) geregelt werden. Dann gilt

$$T'(t) = k \cdot (T_{\text{außen}} - T(t)) + p \cdot (T_{\text{soll}} - T(t));$$

dabei beschreibt  $k \cdot (T_{\text{außen}} - T(t))$  die Änderungsrate durch die Differenz zur Außentemperatur,  $p \cdot (T_{\text{soll}} - T(t))$  die Regelung proportional zur Differenz zur Solltemperatur.

- Schreiben Sie die Differenzialgleichung in der Form  $T' + a \cdot T = b$ .
- Rechnen Sie nach, dass für jedes  $c \in \mathbb{R}$

$$T(t) = \frac{kT_{\text{außen}} + pT_{\text{soll}}}{k + p} + c \cdot e^{-(k+p)t}$$

eine Lösung der Differenzialgleichung ist.

- Erkennen Sie in der Darstellung der Lösung  $T(t)$  aus b) den Lösungsanteil zur homogenen DGL bzw. eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL?
- Überlegen Sie sich, dass man durch geeignete Wahl von  $c$  jede Anfangsbedingung  $T(t_0) = T_0$  erfüllen kann.
- Stellt sich auf lange Sicht die Solltemperatur  $T_{\text{soll}}$  ein?

### Aufgabe 2

Eine gedämpfte Schwingung kann durch die Differenzialgleichung

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (a, b > 0) \tag{1}$$

beschrieben werden. Dabei charakterisiert  $a$  die Dämpfung und  $b$  die Eigenschaften des schwingenden Systems.

- Bestimmen Sie mit Hilfe der Nullstellen des charakteristischen Polynoms ein Fundamentalsystem, also zwei unabhängige Lösungen  $y_1$  und  $y_2$ , von (1) zu  $b = 5$  und

$$\text{i) } a = 2 \qquad \text{ii) } a = 6.$$

Wie sehen die Lösungen qualitativ aus?

- Bestimmen Sie zu den Werten aus a) jeweils eine Lösung mit den Anfangsbedingungen

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Wie sehen die Lösungen aus? Ändert sich an dem qualitativen Verhalten etwas, wenn man andere Anfangsbedingungen wählt?

- Welche Lösungen erhält man für den dämpfungsfreien Fall  $a = 0$ ?

## Fortsetzung von Aufgabe 2:

Betrachtet wird nun die inhomogene Differenzialgleichung

$$y'' + 2y' + 5y = 4e^{-3t}. \quad (2)$$

d) Finden Sie eine spezielle Lösung  $y_s$  von (2) mit Hilfe des Ansatzes  $y_s(t) = c \cdot e^{-3t}$ .

e) Nutzen Sie d) und a)i), um eine Lösung von (2) mit

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

zu bestimmen.

Eine durch eine äußere periodische Kraft erzwungene Schwingung kann man beschreiben durch

$$y'' + ay' + by = \sin(\omega_0 t).$$

Dabei beschreibt  $\omega_0 \in \mathbb{R}^{>0}$  die Frequenz der äußeren Anregung. Im Folgenden wird nur der dämpfungsfreie Fall  $a = 0$  betrachtet, also

$$y'' + by = \sin(\omega_0 t). \quad (3)$$

f) Berechnen Sie (zu beliebigem  $b$  und  $\omega_0$ ) eine Lösung von (3) mittels des Ansatzes  $y(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t)$ .

g) Skizzieren Sie die Amplitude  $A$  bei f) in Abhängigkeit von  $\omega_0$ .

Sehen Sie einen Zusammenhang zur bei c) berechneten Lösung?

## Aufgabe 3

Betrachtet werden eine (inhomogene) lineare Differenzialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f \quad (I)$$

und die zugehörige homogene Differenzialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0 \quad (H)$$

mit Konstanten  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ .

Rechnen Sie nach, dass gilt:

a) Sind  $y_1$  und  $y_2$  zwei Lösungen der homogenen linearen DGL (H), so ist auch jede Linearkombination  $y = c_1y_1 + c_2y_2$  ( $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ) eine Lösung von (H).

(Vgl. Mathe 1, Blatt 11-2, Aufgabe 9)

b) Ist  $y_s$  eine Lösung der inhomogenen DGL (I) und  $y_0$  eine Lösung der zugehörigen homogenen DGL (H), so ist  $y = y_s + y_0$  auch Lösung der inhomogenen DGL (I).

Überlegen Sie sich, dass die Aussagen von a) und b) genauso gelten, wenn  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  nicht konstant sondern Funktionen von  $x$  sind.

## Aufgabe 4

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y''' + 4y'' + 9y' + 10y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3, \quad y''(0) = -1.$$

(Tipp:  $-2$  ist Nullstelle des charakteristischen Polynoms.)