FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

SS 2024
07.05.2024

6. Übungsblatt zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2 für Elektrotechnik

Satz:

Ist $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ in Kugelkoordinaten bzgl. des lokalen Koordinatensystems gegeben durch

$$\vec{F}(r,\varphi,\vartheta) = F_r(r,\varphi,\vartheta)\cdot\vec{e_r} + F_\varphi(r,\varphi,\vartheta)\cdot\vec{e_\varphi} + F_\vartheta(r,\varphi,\vartheta)\cdot\vec{e_\vartheta},$$

so ist

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\cdot F_r\Big) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big(F_\varphi\Big) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\Big(\sin\vartheta\cdot F_\vartheta\Big).$$

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Divergenz des elektrischen Feldes $\vec{E}$ eines idealisierten Dipols, das in Kugelkoordinaten gegeben ist durch

$$\vec{E}(r,\varphi,\vartheta) = c\cdot\left(\frac{2\cos\vartheta}{r^3}\cdot\vec{e_r} + \frac{\sin\vartheta}{r^3}\cdot\vec{e_\vartheta}\right)$$

Aufgabe 2 (Fortsetzung von Aufgabe 5, Blatt 5)

Eine Vollkugel mit Radius R besitze die homogene Ladungsdichte $\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$; dabei ist Q die Gesamtladung der Kugel. Für das elektrische Feld $\vec{E}$ der Kugel gilt dann

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\cdot\vec{r} & \text{innerhalb der Kugel, also für } ||\vec{r}|| \le R,\ (\vec{r} = r\cdot\vec{e_r}), \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\vec{e_r} & \text{außerhalb der Kugel, also für } ||\vec{r}|| \ge R. \end{cases}$$

a) Wie lautet die Darstellung von $\vec{E}$ in kartesischen Koordinaten?

b) Rechnen Sie einerseits in kartesischen und andererseits in Kugelkoordinaten nach, dass gilt:

$$\operatorname{div}\vec{E} = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_0}\rho & \text{innerhalb der Kugel, also } ||\vec{r}|| \le R,\ (\vec{r} = r\cdot\vec{e_r}), \\ 0 & \text{außerhalb der Kugel, also } ||\vec{r}|| \ge R. \end{cases}$$

c) Berechnen Sie $\iint \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{A}$, indem Sie b) und den Integralsatz von Gauss nutzen.

Aufgabe 3

a1) Sei $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2 z \\ \sin z \\ x + 2y \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\vec{G} = \operatorname{rot} \vec{F}$ und dann $h = \operatorname{div} \vec{G}$.

a2) Zeigen Sie, dass für jedes $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{F} = \left(\begin{smallmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{smallmatrix}\right)$, gilt: $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = 0$.

b1) Sei $\varphi(x,y,z) = x \cdot \mathrm{e}^{xz} + \sin(yz)$. Berechnen Sie $\vec{F} = \operatorname{grad} \varphi$ und dann $\vec{G} = \operatorname{rot} \vec{F}$.

b2) Zeigen Sie, dass für jedes $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gilt: $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0$.

Aufgabe 4

Gegeben sei das Vektorfeld $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Wegintegrale $\int \vec{F}\, \mathrm{d}\vec{r}_1$ und $\int \vec{F}\, \mathrm{d}\vec{r}_2$ zu

$$r_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \; t \in [0,1], \qquad \text{und} \qquad r_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ \sin(\pi t) \end{pmatrix}, \; t \in [0,1].$$

b) Berechnen Sie $\operatorname{rot} \vec{F}$. Sehen Sie einen Zusammenhang zu den Ergebnissen von a)?

Aufgabe 5

Befindet sich eine Ladung q_1 im Ursprung und eine Ladung q_2 an der Stelle $\vec{r} = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$, so wirkt auf q_2 die Kraft

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \vec{e}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

(Dabei ist $\vec{e}_r$ der Einheitsvektor in $\vec{r}$-Richtung, also $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$ und $r = ||\vec{r}||$.)

Für das Potenzial $\varphi(\vec{r})$ gilt

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

a) Rechnen Sie nach, dass gilt: $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$.

b) Rechnen Sie einerseits in kartesischen Koordinaten und andererseits in Kugelkoordinaten nach, dass gilt: $\operatorname{grad} \varphi = \vec{F}$.

c) Berechnen Sie die Arbeit W, die verrichtet wird, wenn q_2 von $\left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ nach $\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ verschoben wird ($0 < x_1 < x_2$), auf zwei Arten:

c1) Betrachten Sie den Weg $\vec{r}(t) = \left(\begin{smallmatrix} x(t) \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, mit $x(t) := x_2 - t \cdot (x_2 - x_1)$, $t \in [0,1]$, und berechnen Sie $W = \int \vec{F}\, \mathrm{d}\vec{r}$ „zu Fuß“.

c2) Berechnen Sie W als Potenzialdifferenz (s. Satz 1.8 und b)).

Aufgabe 6

Die Bremswirkung der Wirbelstrombremse einer Straßenbahn ist proportional zur Geschwindigkeit der Bahn. Stellen Sie eine Differenzialgleichung für die Geschwindigkeit der Bahn beim Bremsen auf.

Versuchen Sie, eine Lösung zu finden.

Aufgabe 7

Skizzieren Sie das Richtungsfeld zur DGL $y' = x \cdot y^2$ und zeichnen Sie qualitativ Lösungsverläufe ein, die zu den folgenden Anfangsbedingungen gehören:

a) $y(1) = -1$ b) $y(1) = -2$ c) $y(0) = 2$

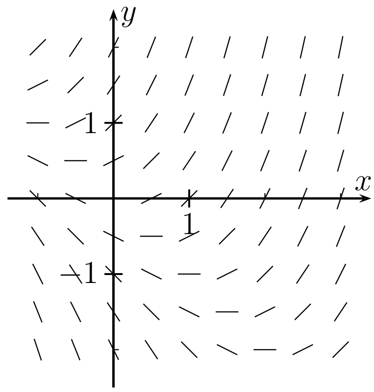
Aufgabe 8

Betrachtet wird das Anfangswertproblem

$$y' = x + y, \quad y(1) = -1.$$

Berechnen Sie eine Näherung für $y(2)$ zur Schrittweite $h = 0.5$ mit Hilfe des Euler-Verfahrens.

Veranschaulichen Sie sich im Richtungsfeld, was passiert.



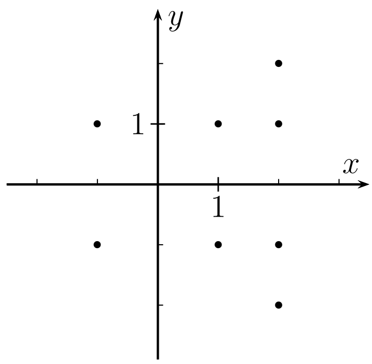
Aufgabe 9 (ehemalige Klausuraufgabe, 10 Minuten)

Betrachtet wird die Differenzialgleichung

$$y' = (x-1) \cdot y^2.$$

a) Zeichnen Sie in das Diagramm an den markierten acht Punkten die Richtungselemente für das Richtungsfeld der Differenzialgleichung.

b) Führen Sie zwei Schritte des Euler-Verfahrens zur Lösung des Anfangswertproblems mit $y(0) = 1$ zu der Differenzialgleichung, Schrittweite 0.5, aus.



Aufgabe 10

Schreiben Sie ein Programm zur numerischen Lösung einer Differenzialgleichung mit Hilfe des Euler-Verfahrens.

Experimentieren Sie mit verschiedenen Schrittweiten und berechnen Sie Näherungswerte an der Stelle $x = 4$ sowie $x = -1$ zu der Lösung zu $y' = xy^2$ mit $y(1) = -1$ bzw. $y(1) = -2$ (vgl. Aufgabe 7).