FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

SS 2024
30.04.2024

5. Übungsblatt zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2 für Elektrotechnik

Aufgabe 1

Die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sei in kartesischen Koordinaten gegeben durch

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2) \cdot z.$$

a) Bestimmen Sie $\int_Z f(x, y, z)\,\mathrm{d}(x, y, z)$, wobei Z der Zylinder um die z-Achse von $z_0 = 0$ bis $z_1 = 2$ mit Radius 1 ist.

b) Bestimmen Sie $\int_K f(x, y, z)\,\mathrm{d}(x, y, z)$, wobei K die auf der (x, y)-Ebene um den Nullpunkt liegende Halbkugel mit Radius 1 ist.

Aufgabe 2

Betrachtet wird ein Kugelkondensator mit innerem Kugelradius R_1 und äußerem Kugelradius R_2. Tragen die Kugelschalen jeweils die Ladung Q bzw. $-Q$, so gilt der folgende Zusammenhang zwischen der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$ und der elektrischen Flussdichte $\vec{D}$ in einem Punkt zwischen den Kugelschalen:

$$\vec{D} \;=\; \varepsilon \cdot \vec{E} \;=\; \frac{Q}{4\pi r^2}\vec{e_r}.$$

Dabei ist ε die Dielektrizitätskonstante, r gibt den Abstand zum Kugelmittelpunkt an, und $\vec{e_r}$ ist ein Vektor der Länge 1 in radialer Richtung.

Die elektrische Energiedichte w_{el} in einem Raumpunkt ergibt sich durch $w_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2}\vec{D} \cdot \vec{E}$, die Gesamtenergie des Feldes durch $W_{\mathrm{el}} = \int w_{\mathrm{el}}\,\mathrm{d}V$, wobei sich das Volumenintegral über das betrachtete Gesamtfeld zwischen den Kugelschalen erstreckt.

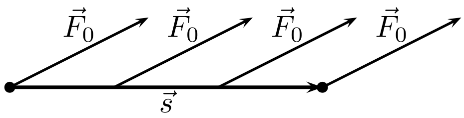
Berechnen Sie die Energie, die im Feld des Kugelkondensators enthalten ist.

Die Aufgaben 1 und 2 entstammen meinem *Arbeitsbuch höhere Mathematik*, Springer-Verlag

Aufgabe 3

Gegeben ist ein konstantes Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}_0$ und ein Weg

$$\vec{r}(t) \;=\; t \cdot \vec{s}, \qquad t \in [0,1]$$



mit einem festen $\vec{s} \in \mathbb{R}^3$.
Rechnen Sie nach, dass

$$\int \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} \;=\; ||\vec{F}_0|| \cdot ||\vec{s}|| \cdot \cos\varphi,$$

wobei φ der von $\vec{F}_0$ und $\vec{s}$ eingeschlossene Winkel ist.

Aufgabe 4 (ehemalige Klausuraufgabe, 8 Minuten)

Bestimmen Sie das Wegintegral $\int \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r}$ zum Vektorfeld

$$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \vec{F}(x,y,z) \;=\; \begin{pmatrix} xy \\ xz \\ x+y \end{pmatrix}$$

über den Weg

$$\vec{r} : [0,\pi] \to \mathbb{R}^3,\ \vec{r}(t) \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5

Eine Vollkugel mit Radius R besitze die homogene Ladungsdichte $\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$; dabei ist Q die Gesamtladung der Kugel. Für das elektrische Feld $\vec{E}$ der Kugel gilt dann

$$\vec{E}(\vec{r}) \;=\; \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \cdot \vec{r} & \text{innerhalb der Kugel, also für } ||\vec{r}|| \leq R,\ (\vec{r} = r \cdot \vec{e_r}), \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{1}{r^2} \cdot \vec{e_r} & \text{außerhalb der Kugel, also für } ||\vec{r}|| \geq R. \end{cases}$$

Begründen Sie, warum man das Flächenintegral $\iint \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{A}$ über die Kugeloberfläche berechnen kann durch

$$\iint \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{A} \;=\; \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \cdot \text{Kugeloberfläche}.$$

Welchen Wert erhält man, wenn man die Formel für die Kugeloberfläche einsetzt?