Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik
Prof. Georg Hoever

SS 2024
23.04.2024

4. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik 2 für Elektrotechnik

Aufgabe 1

Ein Zylinder rollt auf einer ebenen Platte.

a) Stellen Sie eine Formel für die Kurve auf, die ein Punkt am Rand des Zylinders beschreibt.
Anleitung: Betrachten Sie das Problem im Zweidimensionalen. Setzen Sie die Bewegung zusammen aus der Drehbewegung um den Zylindermittelpunkt und der Längsbewegung des Zylinders.

b) Welche Bewegungsrichtung hat der Punkt in dem Moment, in dem er die Platte berührt?

Aufgabe 2 (beispielhafte Klausuraufgabe, 12 Minuten)

Gegeben ist die Kurve $f : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = \begin{pmatrix} t \cdot \cos t \\ t \cdot \sin t \end{pmatrix}$.

a) Es ist $f(0) = \binom{0}{0}$. In welche Richtung verlässt die Kurve bei wachsendem t diesen Punkt?

b) Stellen Sie eine Gleichung für die Tangente an die Kurve zu $t = 2\pi$ auf.

c) Skizzieren Sie die Kurve für $t \in [0, 7]$; berücksichtigen Sie dabei Ihre Ergebnisse von a) und b). Kennzeichnen Sie wichtige Punkte im Koordinatensystem.

Aufgabe 3

a) Leiten Sie her, dass die Länge L einer durch eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ dargestellten Kurve berechnet werden kann durch $L = \int\limits_a^b ||f'(t)||\,\mathrm{d}t$.

Anleitung:

1) Approximieren Sie die Kurve durch einen Streckzug zwischen Punkten $f(t_i)$ mit $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$.
2) Berechnen Sie die Länge der einzelnen Strecken näherungsweise mit Hilfe der Ableitung.
3) Erklären Sie, wie sich das behauptete Integral ergibt.

b) Nutzen Sie die Formel aus a), um die Länge des Kreisbogens zu berechnen, der durch $f : [0, \alpha] \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ gegeben ist.

Aufgabe 4

Berechnen Sie

a) $\displaystyle\int_D (x^2 - xy^2)\ \mathrm{d}(x,y)$ zu $D = [0,3] \times [0,1]$,

b) $\displaystyle\int_D x \cdot \cos(xy)\ \mathrm{d}(x,y)$ zu $D = [0,\pi] \times [0,1]$.

Aufgabe 5

Berechnen Sie

$$\int_D \frac{2z}{(x+y)^2}\ \mathrm{d}(x,y,z) \qquad \text{mit } D = [1,2] \times [2,3] \times [0,2] \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Verifizieren Sie, dass der Wert des Integrals unabhängig von der Reihenfolge der Integrationen ist, indem Sie verschiedene Reihenfolgen ausprobieren.

Aufgabe 6

a) Seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ integrierbar, $D = [a,b] \times [c,d]$.

Zeigen Sie:

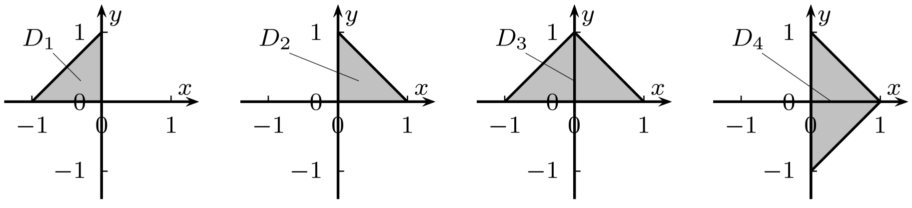
$$\int_D f(x) \cdot g(y)\ \mathrm{d}(x,y) = \left(\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \right) \cdot \left(\int_c^d g(y)\ \mathrm{d}y \right).$$

b) Nutzen Sie die Formel aus a) zur Berechnung von

$$\int_D x^2 \cdot \sin(y)\ \mathrm{d}(x,y) \qquad \text{mit } D = [1,2] \times [0,\pi].$$

Aufgabe 7 (beispielhafte Klausuraufgabe, 6 Minuten)

Betrachtet werden die vier jeweils grau dargestellten Integrationsbereiche D_k im $\mathbb{R}^2$



und die entsprechenden Integralwerte

$$I_k \;=\; \int_{D_k} xy^2\,\mathrm{d}(x,y) \qquad (k = 1, \ldots, 4).$$

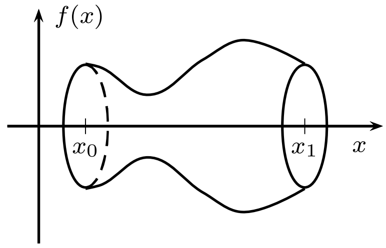
Sortieren Sie die Werte I_k der Größe nach.

Begründen Sie Ihre Anordnung! (Sie brauchen die I_k nicht zu berechnen!)

Aufgabe 8

Überlegen Sie sich, dass das Volumen V eines Rotationskörpers mit der Mantellinie $f(x)$, $x \in [x_0, x_1]$, berechnet werden kann durch

$$V = \pi \int_{x_0}^{x_1} \left(f(x)\right)^2 \, \mathrm{d}x.$$



Aufgabe 9

Sei K_R der Kreis in $\mathbb{R}^2$ um $(0,0)$ mit Radius R. Berechnen Sie

a) $\displaystyle\int_{K_2} (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}(x,y)$,

b) $\displaystyle\int_{K_1} f(x,y) \, \mathrm{d}(x,y)$ mit $f = f(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten ausgedrückt durch

$$f(r,\varphi) = r \cdot \sin\frac{\varphi}{2}, \qquad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Aufgabe 10

Ziel dieser Aufgabe ist es, den Wert von $A = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x$ zu bestimmen. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

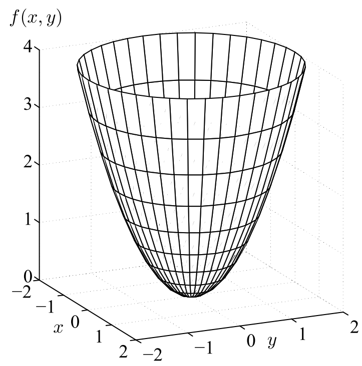
a) Zeigen Sie $A^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} \, \mathrm{d}(x,y)$, indem Sie den Integranden als Produkt schreiben und die Formel aus Aufgabe 6 nutzen.

b) Berechnen Sie $\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} \, \mathrm{d}(x,y)$ durch Integration in Polarkoordinaten.

c) Bestimmen Sie nun den Wert von A.

Aufgabe 11

Berechnen Sie das Volumen des abgebildeten Kelches mit Höhe 4 und oberen Radius 2, der formelmäßig durch $f(x,y) = x^2 + y^2$ beschrieben wird,



a) mit Hilfe einer Integration in Polarkoordinaten,

(Achtung: Gesucht ist nicht das Volumen unter der Kurve sondern der Kelchinhalt!),

b) durch Integration der Flächen horizontaler Schnitte.

Wie wird der Kelch bei den Berechnungen in a) bzw. b) jeweils "zerlegt"?