

### 3. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik 2 für Elektrotechnik

#### Aufgabe 1

Bestimmen Sie die stationären Punkte von

a)  $f(x, y) = x^4 + 2y^2 - 4xy,$

b)  $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 - 4x_3.$

#### Aufgabe 2

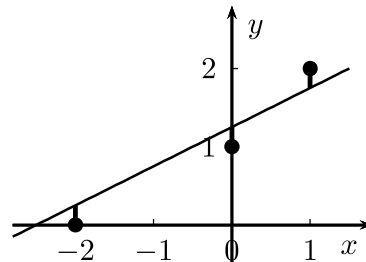
Eine quaderförmige Kiste, die oben offen ist, soll einen Inhalt von 32 Litern haben. Bestimmen Sie Länge, Breite und Höhe so, dass der Materialverbrauch für die Kiste minimal ist.

#### Aufgabe 3

Berechnen Sie eine Ausgleichsgerade zu den drei Punkten

$$(-2, 0), \quad (0, 1) \quad \text{und} \quad (1, 2),$$

d.h. eine Gerade, so dass die Summe der Quadrate der markierten Abstände (in  $y$ -Richtung) minimal ist



#### Aufgabe 4

Ziel ist die Bestimmung des an den Punkt  $\vec{q} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$  nächstgelegenen Punktes auf der Ebene

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bestimmen Sie dazu den Abstand  $d(\lambda, \mu)$  eines beliebigen mit den Parametern  $\lambda$  und  $\mu$  festgelegten Punktes der Ebene  $E$  zu  $\vec{q}$  und suchen Sie eine Minimalstelle dieser Funktion.

## Aufgabe 5

Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen zu

$$\text{a) } f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 e^{x_3} \\ x_2 x_3 x_4 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

$$\text{b) } g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4, g(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x \\ xy \end{pmatrix}.$$

## Aufgabe 6

Wie lautet die Jacobi-Matrix zu

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x) = Ax \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}?$$

## Aufgabe 7

Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x^2 y + x - y^2$ .

- Geben Sie mit Hilfe der linearen Approximation eine Tangentenebene an  $f$  um den Punkt  $(2, 3)$  an.
- Geben Sie mit Hilfe der linearen Approximation eine Näherung für die Funktionsänderung  $\Delta f = f(2 + \Delta x, 3 + \Delta y) - f(2, 3)$  in Abhängigkeit von  $\Delta x$  und  $\Delta y$  an.
- Wie groß ist die Abweichung bei der Funktion  $f$  bzw. durch die Näherungen aus a) bzw. b), wenn man statt  $(2, 3)$  die Stellen  $(2.1, 3)$  bzw.  $(2.05, 3.2)$  einsetzt?
- Nutzen Sie die Näherung aus b), um abzuschätzen, wie groß der Fehler maximal ist, wenn man statt  $(x_0, y_0) = (2, 3)$  die Stelle  $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$  mit  $|\Delta x| \leq 0.1$  und  $|\Delta y| \leq 0.2$  einsetzt.
- Erklären Sie das lineare Fehlerfortpflanzungsgesetz:

Sei  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ . Sind die Größen  $x_k$  mit Fehlern oder Ungenauigkeiten versehen, die maximal  $|\Delta x_k|$  betragen ( $k = 1, \dots, n$ ), so erhält man bei Einsetzen von  $\mathbf{x}$  in eine differenzierbare Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  einen maximalen Fehler von ungefähr

$$|\Delta f| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \right| \cdot |\Delta x_1| + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right| \cdot |\Delta x_n|.$$

## Aufgabe 8 (beispielhafte Klausuraufgabe, 12 Minuten)

$$\text{Sei } f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x^3 y^3 - 2y \\ x \end{pmatrix}.$$

Gesucht ist eine Stelle  $(x, y)$  mit  $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Führen Sie dazu ausgehend vom Punkt  $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  zwei Schritte des (mehrdimensionalen) Newton-Verfahrens durch.