FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

SS 2024
09.04.2024

Die Aufgaben entstammen meinem *Arbeitsbuch höhere Mathematik*, Springer-Verlag

2. Übungsblatt zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2 für Elektrotechnik

Aufgabe 1

Berechnen Sie zu den folgenden Funktionen sämtliche partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung.

a) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x,y,z) \;=\; \dfrac{x^2 y}{z^2+1}$.

b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) \;=\; \mathrm{e}^{xy} \cdot \sin(x^2+y)$.

Aufgabe 2

Zu zwei Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ wird das Skalarprodukt $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$ betrachtet. Berechnen Sie $\operatorname{grad} f(\mathbf{x})$ zu den folgenden Funktionen:

a) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f(\mathbf{x}) \;=\; \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$ zu fest gewähltem $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.

b) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f(\mathbf{x}) \;=\; \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$.

c) Zu einer symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und einem Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ kann man die quadratische Form $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ bilden. Sei

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sehen Sie einen Zusammenhang zwischen A und $\operatorname{grad} f(\mathbf{x})$?

Aufgabe 3

Die beiden Platten eines (unendlich ausgedehnten) Plattenkondensators seien beschrieben durch die beiden Ebenen $\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) | \, x = 0\}$ und $\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) | \, x = 1\}$. Das elektrisches Feld $\vec{E}$ zwischen den Kondensatorplatten ist homogen: $\vec{E}(x,y,z) = \left(\begin{smallmatrix} E_0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ für $0 < x < 1$.

a) Suchen Sie eine Potenzialfunktion $\Phi(x,y,z)$, also eine Funktion $\Phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\vec{E} = -\operatorname{grad} \Phi$.

b) Bestimmen Sie die Äquipotenzialflächen, d.h. die Punktemengen, auf denen Φ konstant ist.

Aufgabe 4

a) Führen Sie von Hand je zwei Schritte des Gradientenverfahrens zur *Minimierung* von

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) \;=\; x^4 + 2y^2 - 4xy$$

ausgehend von $(0,1)$ mit Schrittweite $\lambda = \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{1}{4}$ und $\lambda = \frac{1}{8}$ aus.

b) Führen Sie von Hand zwei Schritte des Gradientenverfahrens zur *Minimierung* von

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1,x_2,x_3) \;=\; 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 - 4x_3$$

ausgehend von $(2,3,4)$ mit Schrittweite $\lambda = \frac{1}{2}$ aus.

c) Schreiben Sie ein Programm zur Minimierung von f aus a) bzw. b) mittels des Gradientenverfahrens und experimentieren Sie mit verschiedenen Startwerten und unterschiedlichen Schrittweiten.

Aufgabe 5

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2 \cdot \sin(yz)$.

Berechnen Sie den Gradienten zu f an der Stelle $(x_0,y_0,z_0) = (2,1,3)$ näherungsweise, indem Sie jeweils numerische Ableitungen nutzen, d.h. entsprechende Differenzenquotienten, mit $h = 0.1$.

Wie lautet der Gradient an der Stelle exakt?

(Nutzen Sie einen Taschenrechner!)

Aufgabe 6

Das Potenzial eines im Ursprung befindlichen in z-Richtung ausgerichteten Dipols ist (in einiger Entfernung vom Ursprung angenähert) durch

$$\Phi(\varrho,\varphi,z) \;=\; c \cdot \frac{z}{(\varrho^2+z^2)^{3/2}} \quad \text{in Zylinderkoordinaten bzw.}$$

$$\Phi(r,\varphi,\vartheta) \;=\; c \cdot \frac{\cos\vartheta}{r^2} \quad \text{in Kugelkoordinaten}$$

mit einer Konstanten c gegeben.

Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E} = -\text{grad}\ \Phi$ einerseits in Zylinder- und andererseits in Kugelkoordinaten.

Aufgabe 7 (beispielhafte Klausuraufgabe, 12 Minuten)

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ in Kugelkoordinaten gegeben durch

$$f(r,\varphi,\vartheta) \;=\; r^2 \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(2\vartheta).$$

a) Welchen Funktionswert hat f an der (in kartesischen Koordinaten gegebenen) Stelle $(x,y,z) = (1,0,1)$?

b) Geben Sie den Gradienten grad $f(r,\varphi,\vartheta)$ in (lokalen) Kugelkoordinaten an.

c) Geben Sie den Gradienten von f an der (in kartesischen Koordinaten gegebenen) Stelle $(x,y,z) = (1,0,1)$ in kartesischen Koordinaten an.