

14. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik 2 für Elektrotechnik

Aufgabe 1

Wie oft müssen Sie im Durchschnitt würfeln, bis Sie zum ersten Mal eine Sechs erhalten?

Tipp: $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$

Aufgabe 2

Früher war die Bewertung der Multiple-Choice Aufgaben der Matheklausur wie folgt: Für eine richtige Antwort gab es +1 und für eine falsche -1 Punkte, keine Antwort zählte 0 Punkte; eine negative Gesamtpunktzahl wurde als 0 Punkte für die Aufgabe gerechnet.

Bei einer Aufgabe mit vier Teilaufgaben und jeweils drei Ankreuzmöglichkeiten hatten die Studenten keine Ahnung. Wie groß war der zu erwartende Durchschnitt der erreichten Gesamtpunktzahlen,

- a) wenn die Studierenden jeweils bei nur einer Teilaufgabe etwas ankreuzten und den Rest unbeantwortet ließen,
- b) wenn alle Studierenden bei allen vier Teilaufgaben etwas ankreuzten?

Aufgabe 3

- a) Berechnen Sie zu einer exponential-verteilten Zufallsvariablen X mit Parameter λ
 - a1) den Erwartungswert $E(X)$,
 - a2) den Wert $x_{0.5}$, so dass $P(X \leq x_{0.5}) = \frac{1}{2}$ ist.
- b) Die Zeit zwischen zwei Anrufen bei einer Beratungsstelle ist ungefähr exponential-verteilt. Im Mittel klingelt das Telefon nach 3 Minuten wieder.
 - i) Wie groß ist der Parameter λ zu wählen, wenn die Aussage bedeutet,
 - 1) dass die 3 Minuten der Durchschnitt der Wartezeiten ist,
 - 2) dass in 50% der Fälle das Telefon nach 3 Minuten wieder klingelt.
 - ii) Wie groß ist in den Interpretationen von 1) bzw. 2) die Wahrscheinlichkeit, dass der Berater nach einem Anruf mindestens 5 Minuten Pause hat?
- c) Die Blockchain bei Bitcoin ist so designt, dass im Durchschnitt (Erwartungswert) alle 10 Minuten ein neuer Block erzeugt wird.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man mehr als 30 Minuten auf den nächsten Block warten muss (unter der Annahme, dass die Zeit zwischen zwei Blöcken exponentialverteilt ist)?

Aufgabe 4

- a) Berechnen Sie die Varianz und die Standardabweichung einer auf dem Intervall $[-1, 1]$ gleichverteilten Zufallsvariablen X .
- b) Leiten Sie aus dem Ergebnis von a) anschaulich ab, wie groß die Standardabweichung einer auf dem Intervall $[\mu - d, \mu + d]$ gleichverteilten Zufallsvariablen ist.

Aufgabe 5

Eine Zufallsvariable X liefert die Werte 5, 10, 15 oder 20 mit den Wahrscheinlichkeiten

k	5	10	15	20
$p(X = k)$	0.4	0.2	0.3	0.1

- a) Schätzen Sie zunächst den Erwartungswert und die Standardabweichung von X grob und berechnen Sie die Werte anschließend genau.

Hundert Realisierungen von X haben 43 mal 5, 19 mal 10, 27 mal 15 und 11 mal 20 ergeben.

- b) Berechnen Sie Mittelwert, Varianz und Standardabweichung der Stichprobe.
- c) Angenommen, man kennt die exakten Wahrscheinlichkeitswerte nicht: Welche Wahrscheinlichkeitswerte würde man auf Grund der Stichprobe annehmen?

Welchen Erwartungswert berechnet man aus diesen Wahrscheinlichkeitswerten?

Aufgabe 6 (entspricht ehemaliger Klausuraufgabe, 12 Punkte)

Eine Produktionsstraße soll 100 Ω -Widerstände herstellen. Messungen an 10 Widerständen ergeben die folgenden Werte:

99.2 Ω , 99.8 Ω , 100.4 Ω , 98.7 Ω , 100.1 Ω , 99.8 Ω , 99.6 Ω , 100.6 Ω , 99.3 Ω , 99.5 Ω .

Wieviel Prozent der produzierten Widerstände weicht um mehr als 1 Ω vom Soll-Wert 100 Ω ab, wenn man eine Normalverteilung entsprechend der Schätzwerte aus der Stichprobe annimmt?

Aufgabe 7

Können die folgenden Situationen bei einer Stichprobenziehung zu einem Zufallsexperiment, das reelle Werte liefert, auftreten?

Falls ja, geben Sie ein Beispiel an; falls nein, begründen Sie warum nicht.

- a) Der Median ist gleich 1, der Mittelwert gleich 10.
- b) Der Mittelwert ist gleich 3, die Standardabweichung der Stichprobe ist gleich 2, und alle Stichprobenwerte liegen außerhalb von $[1; 5]$.