

13. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik 2 für Elektrotechnik

Aufgabe 1

Messungen an einem Server zeigen, dass in ca. 80% der Fälle zwei Anfragen an den Server einen zeitlichen Abstand größer als 10ms haben.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Anfragen einen Abstand kleiner als 1ms haben unter der Annahme, dass die Zeit zwischen zwei Anfragen exponentialverteilt ist?

Aufgabe 2

Der radioaktive Zerfall eines Atoms ist ein Zufallsprozess, der exponentialverteilt ist. Die Halbwertszeit eines Elements gibt an, nach welcher Zeit die Wahrscheinlichkeit für einen Zerfall gleich $\frac{1}{2}$ ist. Radon hat eine Halbwertszeit von 3.8 Tagen.

- Welchem Parameter λ (der Exponentialverteilung) entspricht dies?
- Wie wahrscheinlich ist, dass ein Radon-Atom schon nach einem Tag zerfällt?
- Wie lange dauert es, dass das Atom mit 90-prozentiger Sicherheit zerfallen ist?
- Wie lange dauert es allgemein bei einer Halbwertszeit $T_{0.5}$, dass das Atom mit 90-prozentiger Sicherheit zerfallen ist?

Aufgabe 3

Skizzieren Sie in einem Koordinatensystem die Wahrscheinlichkeitsdichten zu Normalverteilungen mit

- a) $\mu = 0, \sigma = 1$ b) $\mu = 2, \sigma = 1$ c) $\mu = 1, \sigma = 0.5$ d) $\mu = 1, \sigma = 3$.

Wie groß ist jeweils die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses im Intervall $[1; 2]$?

Aufgabe 4

Sei f die Wahrscheinlichkeitsdichte zur Standardnormalverteilung.

- Sei g die Wahrscheinlichkeitsdichte zu einer Normalverteilung mit $\mu = 1$ und $\sigma = 2$.
 - Skizzieren Sie f und g und machen Sie sich (durch Verschiebung und Stauchung/Streckung) plausibel, dass $P_f([-1, 2]) = P_g([-1, 5])$ gilt (wobei P_f bzw. P_g die Wahrscheinlichkeiten entsprechend dieser Dichten sind).
 - Welchen Intervallen bei der Standardnormalverteilung entsprechen die Intervalle $[1; 3]$ und $[-2; 2]$ bei g ?
 - Drücken Sie $P_f([-1, 2])$ und $P_g([-1, 5])$ mit Hilfe der Dichten aus, und nutzen Sie Substitution, um zu zeigen, dass der zweite Ausdruck gleich dem ersten ist.
- (Ziel dieser Teilaufgabe ist die Herleitung von Satz 4.7 des Skript.)

Sei g die Wahrscheinlichkeitsdichte zu einer (μ, σ^2) -Normalverteilung.

Drücken Sie $P_g([a, b])$ mit Hilfe der Dichte aus, formen Sie den Ausdruck so um, dass ein Integral bzgl. der Dichte der Standardnormalverteilung entsteht (vgl. a3)), und nutzen Sie die Φ -Funktion zur Darstellung des Integrals.

Aufgabe 5

Bei einer Großbäckerei schwankt das Gewicht der hergestellten Brötchen normalverteilt mit Standardabweichung σ um den eingestellten Wert.

- Ein Großkunde wünscht Brötchen mit einem Gewicht von 100g und verlangt, dass höchstens 5% um mehr als 3g davon abweichen. Mit welcher Prozessgenauigkeit σ muss die Bäckerei arbeiten, um dies zu erfüllen?
- Die Bäckerei kann nur eine Standardabweichung von $\sigma = 2$ g erreichen und einigt sich mit dem Kunden darauf, dass sie Brötchen liefert, bei denen höchstens 2.5% leichter als 97g sind. Auf welchen Mittelwert muss die Maschine eingestellt werden, um dies zu erreichen?

Aufgabe 6 (ehemalige Klausuraufgabe, 8 Punkte)

Wenn Mäxchen zu einer bestimmten Zeit t_0 an der Bushaltestelle sein will, dann ist seine tatsächliche Ankunftszeit normalverteilt um t_0 mit Standardabweichung $\sigma = 1$ Minute.

- Mäxchen plant so, dass er eine Minute vor der Busabfahrt an der Haltestelle sein will. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er den Bus verpasst?
- Wieviel Minuten vor der Busabfahrt sollte Mäxchen planen, an der Haltestelle zu sein, damit er den Bus mit 90-prozentiger Sicherheit erreicht?
- Welche Standardabweichung σ muss Mäxchen erreichen, damit es ausreicht, dass er plant, eine Minute vor Abfahrt an der Haltestelle zu sein, und den Bus dabei mit 90-prozentiger Sicherheit erreicht?

(Sie brauchen Ihre Angaben nicht zu begründen.)

Aufgabe 7

Betrachtet wird die Übertragung von Bits über einen gestörten Kanal (*AWGN-Modell: additive white gaussian noise*).

Gesendet wird $\pm\sqrt{E_b}$, wobei E_b die Energie pro Bit ist ($\sqrt{E_b}$ für das 1-Bit, $-\sqrt{E_b}$ für das 0-Bit). Während der Übertragung wird das Signal gestört, so dass beim Empfänger ein Wert ankommt, der normalverteilt um den gesendeten Wert mit Varianz $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$ ist (N_0 ist die (einseitige) *Rauschleistungsdichte*). Ein positiver Empfangswert wird als 1-Bit, ein negativer als 0-Bit interpretiert.

- Skizzieren Sie die Situation.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für eine Fehlentscheidung in Abhängigkeit von E_b und N_0 ?
- Bei b) werden Sie feststellen, dass die Wahrscheinlichkeit für eine Fehlentscheidung nur vom *Signal-zu-Rausch-Verhältnis* (SNR: Signal-to-Noise-Ratio) $\frac{E_b}{N_0}$ abhängt. Dieses gibt man üblicherweise in dB an:

$$\text{SNR} = 10 \cdot \log_{10} \frac{E_b}{N_0} \text{ [dB]} \quad (\text{vgl. Mathe 1, Blatt 3-1, Aufgabe 10}).$$

Wie groß ist konkret die Bitfehlerrate bei einem SNR von 6dB?