

11. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Mathematik 2 für Elektrotechnik

Aufgabe 1

Berechnen Sie mittels der Korrespondenztabelle und Satz 3.11 aus Abschnitt 3.4 der Vorlesung die Laplace-Transformierten $\mathcal{L}(f)$ zu den folgenden Funktionen.

(Die Angaben beziehen sich auf $t \geq 0$; für $t < 0$ soll $f(t) = 0$ sein.)

a) $f(t) = 2 \cos t - \sin t,$

b) $f(t) = (t + 1)^2,$

c) $f(t) = e^{-t} \cos(2t),$

d) $f(t) = \begin{cases} (t - 1)^2, & \text{für } t \geq 1 \\ 0, & \text{für } t < 1 \end{cases},$

e) $f(t) = (t - 1)^2.$

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Rücktransformationen $\mathcal{L}^{-1}(F)$ zu

a) $F(s) = \frac{1}{s + 1},$

b) $F(s) = \frac{1}{s^3},$

c) $F(s) = \frac{1}{s^2 + 4},$

d) $F(s) = \frac{1}{(s + 3)^2 + 1},$

e) $F(s) = \frac{1}{s^2 - 1},$

f) $F(s) = \frac{s - 7}{s^2 + s - 6},$

g) $F(s) = \frac{1 - s}{s^2 + 6s + 13}$ (Tipp: quadr. Erg. im Nenner).

Aufgabe 3

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme mit Hilfe der Laplace-Transformation:

- a) $y'(t) - y(t) = e^t, \quad y(0) = 1.$
- b) $y''(t) - y(t) = t, \quad y(0) = 3, y'(0) = 2.$

Aufgabe 4

Gesucht ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$y''' + 4y'' + 9y' + 10y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 3, y''(0) = -1$$

(vgl. Blatt 7, Aufgabe 4).

- a) Geben Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung mit Hilfe der Nullstellen des charakteristischen Polynoms an.
- b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems mit Hilfe der Laplace-Transformierten.

Aufgabe 5

Die Laplace-Transformierte zu $y(t)$ habe die Gestalt

$$Y(s) = \frac{q(s)}{s^3 + 5s^2 + 9s + 5},$$

wobei q ein quadratisches Polynom ist.

- a) Bestimmen Sie die Nullstellen des Nenners von $Y(s)$.
- b) Wie lautet der Ansatz zur Partialbruchzerlegung von $Y(s)$?
- c) Welche Funktionsbestandteile erhält man bei der Rücktransformation?

Wie sieht qualitativ das zeitliche Verhalten von $y(t)$ aus?