Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

10. Übungsblatt zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2 für Elektrotechnik

Aufgabe 1

Berechnen Sie die komplexen Fourierkoeffizienten $c_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}nx}\,\mathrm{d}x$ zu

$$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x - \pi$$

und die zugehörige Fourierreihe $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}nx}$.

Vergleichen Sie das Ergebnis mit der reellen Fourierreihe von Blatt 9, Aufgabe 3; fassen Sie dazu die Ausdrücke für n und $-n$ jeweils zusammen und nutzen Sie die Darstellung $\mathrm{e}^{\mathrm{j}b} = \cos b + \mathrm{j}\sin b$.

Aufgabe 2

Zu einer T-periodischen Funktion f werden Fourierkoeffizienten

$$a_n = \frac{2}{T}\int\limits_0^T f(x)\cos(n\tfrac{2\pi}{T}x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad b_n = \frac{2}{T}\int\limits_0^T f(x)\sin(n\tfrac{2\pi}{T}x)\,\mathrm{d}x$$

sowie die zugehörige Fourierreihe $\frac{1}{2}a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(n\frac{2\pi}{T}x) + b_n\sin(n\frac{2\pi}{T}x)\Big)$ betrachtet.

a) Überlegen Sie sich, dass die Definition für den Fall $T = 2\pi$ mit der üblichen Definition übereinstimmt.

b) Zu einer T-periodischen Funktion g mit den wie oben definierten Fourierkoeffizienten $a_n^{(g)}$ und $b_n^{(g)}$ wird die gestauchte/gestreckte Funktion $h(x) := g(\frac{T}{2\pi}x)$ definiert und dazu die wie üblich (Definition 3.1) definierten Fourierkoeffizienten $a_n^{(h)}$ und $b_n^{(h)}$ betrachtet.

   1) Skizzieren Sie g und h für den Fall $T = 1$ und g als 1-periodischer Fortsetzung zu

   $$g(x) = x - x^2 \quad \text{für } x \in [0, 1[.$$

   Wie lauten die Formeln zur Berechnung von $a_n^{(g)}$ und $a_n^{(h)}$ konkret?

   2) Überlegen Sie sich allgemein, dass h 2π-periodisch ist.

   3) Zeigen Sie allgemein: $a_n^{(g)} = a_n^{(h)}$ und $b_n^{(g)} = b_n^{(h)}$.

   (Tipp: Substitution)

Aufgabe 3

Sei $u(t)$ die 0.5-periodische Funktion mit $u(t) = |t|$, $t \in [-0.25, 0.25]$

a) Skizzieren Sie u.

b) Berechnen Sie die Fourier-Darstellung von u (vgl. Aufgabe 2).

   Tipp: Nutzen Sie eine zentrierte Integration und Symmetrieüberlegungen wie bei Blatt 9, Aufgabe 4.

Aufgabe 4

a) Berechnen Sie die Fourier-Transformierten F_1 und F_2 zu

$$f_1(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t \leq 0 \\ \mathrm{e}^{-t}, & \text{falls } t > 0 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad f_2(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t \leq 0 \\ 2\,\mathrm{e}^{-4t}, & \text{falls } t > 0 \end{cases}$$

b) Veranschaulichen Sie sich, dass eine „schmale" Funktion f zu einer „breiten" Fourier-Transformierten F wird und umgekehrt, indem Sie mit einem Funktionsplotter jeweils f_1 und f_2 sowie $|F_1|$ und $|F_2|$ in einem Koordinatensystem visualisieren.

c) Rechnen Sie für f_1 ud F_1 konkret nach, dass die *Parsevalsche Gleichung* gilt, die besagt, dass bei $f \circ\!\!-\!\!\bullet\, F$ gilt:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t \;=\; \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \,\mathrm{d}\omega.$$

Aufgabe 5 (ehemalige Klausuraufgabe)

Bekanntlich ist die Fourier-Transformierte zu

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} 1, & \text{falls } t \in [-1, 1], \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

gleich $F(\omega) = \frac{2}{\omega} \sin \omega$.

Nutzen Sie dies, um die Fourier-Transformierten zu den folgenden vier Funktionen zu bestimmen:

$$g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g_1(t) = \begin{cases} 2, & \text{falls } t \in [-1, 1], \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

$$g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g_2(t) = \begin{cases} 1, & \text{falls } t \in [-3, 3], \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

$$g_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g_3(t) = \begin{cases} 1, & \text{falls } t \in [0, 2], \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

$$g_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g_4(t) = \begin{cases} t, & \text{falls } t \in [-1, 1], \\ 0, & \text{sonst}. \end{cases}$$

Aufgabe 6

Überlegen Sie sich, dass für die Fourier-Transformierte F einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt:

1) $F(-\omega) = F(\omega)^*$. (Dabei bezeichnet z^* die zu z konjugiert komplexe Zahl.)

2) Ist f gerade, so ist F rein reell.

3) Ist f ungerade, so ist F rein imaginär.

Tipp: Euler-Formel!