

Übungsblatt 3-1 zur Vorlesung Höhere Mathematik 1

Aufgabe 1

Geben Sie (ohne Gebrauch eines Taschenrechners) jeweils zwei ganze Zahlen an, zwischen denen die folgenden Werte liegen:

$$\sqrt{20}, \quad \sqrt{80}, \quad \sqrt[3]{20}, \quad \sqrt[3]{80}, \quad \sqrt[5]{100}.$$

Aufgabe 2

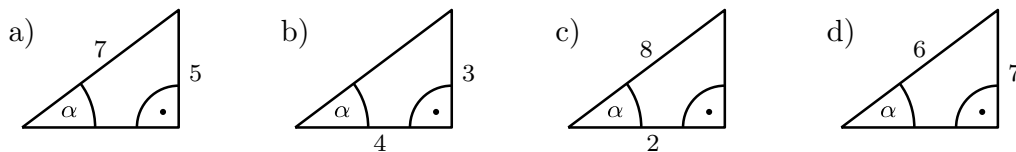
Bestimmen Sie die reellen Werte x , für die gilt:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \sqrt{2+3x} = 2, & \text{b)} \sqrt{x-2} = \frac{1}{3}x, \\ \text{c)} \sqrt{1-x} = x-2, & \text{d)} \sqrt{32-16x} = x-5, \\ \text{e)} \sqrt{x+2} = x, & \text{f)} \sqrt{8-4x} = x-3. \end{array}$$

(Beachten Sie, dass Quadrieren keine Äquivalenzumformung ist; es können sich „falsche Lösungen“ einschleichen!)

Aufgabe 3

Berechnen Sie den Winkel α (in Bogenmaß und Grad) in den abgebildeten Dreiecken. (Die Zeichnungen sind nicht maßstabsgetreu; nutzen Sie einen Taschenrechner)



Aufgabe 4

- Welchen Winkel schließt die Gerade $y = \frac{1}{2}x$ mit der x -Achse ein?
- Wie lautet der Zusammenhang zwischen der Steigung einer Geraden und dem Winkel zwischen der x -Achse und der Geraden allgemein.

Aufgabe 5

Offensichtlich gibt es im Intervall $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ ein x_1 mit $\sin x_1 = 0.8$ und im Intervall $[\pi, 2\pi]$ zwei Werte x_2 und x_3 mit $\sin x_2 = \sin x_3 = -0.8$.

Berechnen Sie diese Werte mithilfe der arcsin-Funktion Ihres Taschenrechners unter Ausnutzung von Symmetrieüberlegungen.

Aufgabe 6

Sind folgende Gleichungen lösbar? Falls ja: Geben Sie eine Lösung an!

Tipp: Nutzen Sie ggf. Substitutionen und Umformungen zwischen den trigonometrischen Funktionen.

- a) $\cos^2 x - 5 \cos x + 6 = 0$, b) $\sin^2 y - 2 \sin y + \frac{3}{4} = 0$,
c) $\cos^2 a + 2 \sin a - 2 = 0$, d) $\tan r = 2 \sin r$.

Aufgabe 7

Überlegen Sie sich, zwischen welchen zwei ganzen Zahlen die Lösungen x zu den folgenden Gleichungen liegen.

- a) $10^x = 20$, b) $2^x = 10$, c) $3^x = 0.5$, d) $8^x = 3$,
e) $0.7^x = 0.3$, f) $4^x = 1.1$, g) $0.5^x = 4$, h) $0.2^x = 0.5$.

Wie kann man die Lösung mit Hilfe des Logarithmus ausdrücken?

Berechnen Sie die genaue Lösung mit einem Taschenrechner.

Aufgabe 8

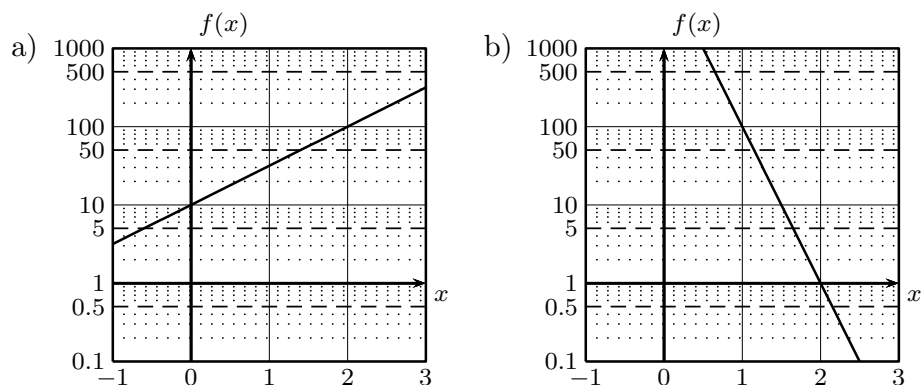
Für welche Variablenwerte sind die folgenden Gleichungen erfüllt?

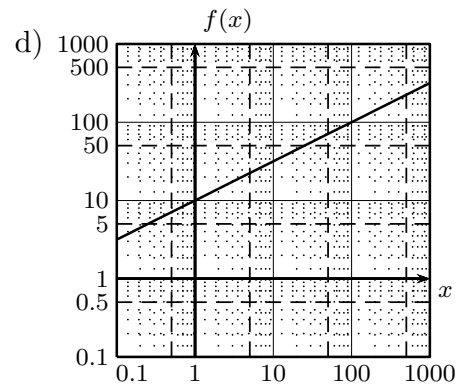
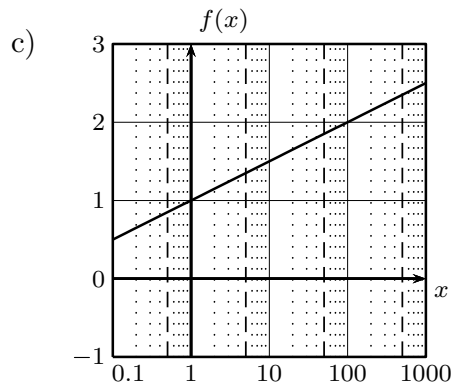
(Tipp: Nutzen Sie Logarithmenregeln zur Umformung!)

- a) $\log_c 8 = 3$, b) $\log_2 z = 4$,
c) $\log_5(b^2) + \log_5 b = 6$, d) $\log_2(8x) + \log_2(4x) + \log_2 \frac{x}{2} = 1$,
e) $3 \cdot \log_{10} x + \log_{10} \sqrt{x} = 7$, f) $\log_3 \sqrt{a} - \log_3 \sqrt[3]{a} = \frac{1}{3}$,
g) $\log_3 x - \log_9 x = 1$, h) $\log_a 4 + \log_a 9 = 2$.

Aufgabe 9

Welche Funktionen sind in den folgenden Schaubildern (mit zum Teil logarithmischer Skalierung) durch die Geraden dargestellt?





Aufgabe 10

Signal-zu-Rausch-Verhältnisse (*SNR: signal-to-noise-ratio*) werden häufig in Dezibel (dB) angegeben. Dabei ist Bel (B) der Logarithmus zur Basis 10 des Verhältnisses. Zehn Dezibel entsprechen einem Bel, so dass sich mit der Signalleistung S und der Rauschleistung R das SNR in dB ergibt durch

$$\text{SNR} = 10 \cdot \log_{10} \frac{S}{R} \text{ [dB]}.$$

- Welchen Wert hat das SNR bei einer Signalleistung $S = 10 \text{ W}$ und einer Rauschleistung von $R = 0.1 \text{ W}$?
- Um wieviel ändert sich SNR, wenn man die Signalleistung verdoppelt?

Aufgabe 11

Zeigen Sie: Für die Umkehrfunktion arsinh zu $f(x) = \sinh x$ gilt:

$$\text{arsinh } y = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}).$$

Anleitung: Zur Bestimmung der Umkehrfunktion müssen Sie die Gleichung $f(x) = y$ nach x umstellen. Nutzen Sie dazu die Definition von $\sinh x$, führen Sie die Substitution $z = e^x$ durch und stellen Sie die Gleichung zunächst nach z um.

Aufgabe 12

Der Bodensee ist ca. 50 km lang (Konstanz-Bregenz).

- Wieviel steht der Bodensee über?

Genauer: Wie tief läge ein straff gespanntes Seil unter dem durch die Erdkrümmung aufgewölbten Wasserspiegel?

- Wieviel kürzer ist das gespannte Seil gegenüber einem auf der Wasseroberfläche schwimmenden?

Stellen Sie zunächst eine Formel für die Höhe h bzw. die Längendifferenz Δl in Abhängigkeit vom Erdradius R und der Entfernung l zwischen Konstanz und Bregenz auf, bevor Sie die konkreten Werte einsetzen. (Es ist $R \approx 6370 \text{ km}$.)

- Welche Werte erhalten Sie für einen 100 m langen See?

(Nutzen Sie einen Taschenrechner.)