Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik
Prof. Georg Hoever

WS 2025/26
23.10.2025

Übungsblatt 4-1 zur Vorlesung Höhere Mathematik 1

Aufgabe 1

Geben Sie $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, z^* und $|z|$ an zu

a) $z = 3 - 2\mathrm{j}$, b) $z = 1 + \mathrm{j}$, c) $z = 2\mathrm{j}$, d) $z = -1$.

Visualisieren Sie die Größen.

Aufgabe 2

Zeigen Sie für beliebige $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$z_1{}^* \cdot z_2{}^* \;=\; (z_1 \cdot z_2)^*.$$

Aufgabe 3

Sei $z_1 = 1 + 2\mathrm{j}$ und $z_2 = -3 + 5\mathrm{j}$.

Berechnen Sie $z_1 + z_2$ sowie $z_1 \cdot z_2$ und verifizieren Sie

$$|z_1 + z_2| \;\leq\; |z_1| + |z_2| \qquad \text{sowie} \qquad |z_1 \cdot z_2| \;=\; |z_1| \cdot |z_2|.$$

Aufgabe 4

Sei $z = 1 + \mathrm{j}$.

a) Berechnen Sie $|z^n|$, $n = 1, 2, \ldots, 8$.

b) Stellen Sie $z, z^2, z^3, \ldots, z^8$ in der Gaußschen Zahlenebene dar.

Aufgabe 5

a) Berechnen Sie $\frac{1}{z}$ und visualisieren Sie die Ergebnisse zu

1) $z = 3 + 4\mathrm{j}$, 2) $z = 1 - \mathrm{j}$, 3) $z = 2\mathrm{j}$.

b) Berechnen Sie

1) $\dfrac{2+\mathrm{j}}{3+4\mathrm{j}}$, 2) $\dfrac{\mathrm{j}}{1-2\mathrm{j}}$, 3) $\dfrac{4+2\mathrm{j}}{2+\mathrm{j}}$, 4) $\dfrac{1+3\mathrm{j}}{\mathrm{j}}$.

Aufgabe 6

Gesucht sind die Lösungen $z^2 = w$ zu $w = 3 + 4\mathrm{j}$.

a) Visualisieren Sie w und die ungefähre Lage einer Lösung z in der komplexen Zahlenebene.

Berechnen Sie z, indem Sie ausnutzen, wie der Winkel (zur positiven x-Achse) und der Betrag von z mit den entsprechenden Größen von w zusammenhängen. (Nutzen Sie einen Taschenrechner.)

Wie lautet die andere Lösung?

b) Berechnen Sie die Lösungen durch einen Ansatz $z = a + b\mathrm{j}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 7

Zerlegen Sie die folgenden Polynome in Linearfaktoren

a) $z^2 + 2z + 5$, b) $z^3 + \mathrm{j}z^2 + 2\mathrm{j}$ (Tipp: $z = \mathrm{j}$ ist eine Nullstelle.).

Aufgabe 8

Zerlegen Sie $p(z) = z^4 - 6z^2 + 25$ in das Produkt zweier im Reellen nullstellenfreier quadratischer Polynome.

Nutzen Sie dazu die biquadratische Struktur, um die (komplexen) Nullstellen von p zu ermitteln (Tipp: s. Aufgabe 6), und fassen Sie Linearfaktoren zu zueinander konjugiert komplexen Nullstellen zusammen.

Aufgabe 9

Führen Sie eine *komplexe Partialbruchzerlegung* von

$$f(x) = \frac{-2x^2 - 3}{x^3 + x}$$

durch. Zerlegen Sie dazu den Nenner komplett in Linearfaktoren und führen Sie eine Partialbruchzerlegung entsprechend dieser Linearfaktoren durch.

Was erhält man, wenn man die Partialbrüche zueinander konjugiert komplexer Polstellen zusammenfasst? (Vgl. Blatt 1-2, Aufgabe 6d))

Aufgabe 10 (beispielhafte Klausuraufgabe, 10 Minuten)

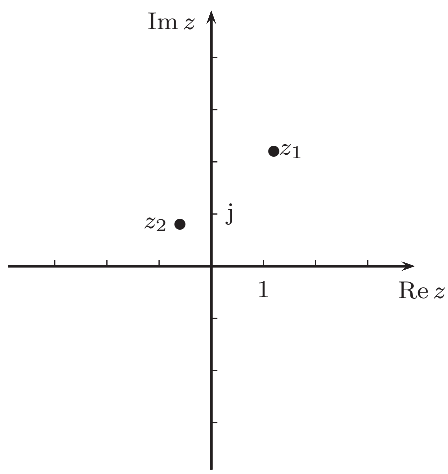
In der nebenstehend abgebildeten Gaußschen Zahlenebene sind zwei komplexe Zahlen z_1 und z_2 markiert.
Skizzieren Sie in dem Bild, wo ungefähr die folgenden Zahlen liegen:

$$w_1 = 2 \cdot z_1, \quad w_2 = z_1 + z_2,$$

$$w_3 = z_1 \cdot z_2, \quad w_4 = \frac{1}{z_1},$$

$$w_5 = z_1^2, \quad \text{ein } w_6 \text{ mit } w_6^2 = z_1.$$

(Sie brauchen nicht zu rechnen.)



Aufgabe 11

Zur Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = \frac{1}{z}$ wird die Menge $G = \{z \in \mathbb{C} |\, \mathrm{Im}\, z = 1\}$ und deren Bildmenge $M = f(G) = \{\frac{1}{z} |\, \mathrm{Im}\, z = 1\}$ betrachtet.

a) Zeichnen Sie G und berechnen Sie einige Punkte aus M.

Markieren Sie diese Punkte in der Gaußschen Zahlenebene.

b) Zeigen Sie, dass die Menge M auf einem Kreis um $-\frac{1}{2}\mathrm{j}$ mit Radius $\frac{1}{2}$ liegt.