

Übungsblatt 3-2 zur Vorlesung Höhere Mathematik 1

Aufgabe 1

Was ist richtig?

| Die Verkettung $g \circ f$ ist | gerade | ungerade | im Allgemeinen keines von beiden |
|--|--------|----------|-------------------------------------|
| a) wenn f und g gerade sind | | | |
| b) wenn f und g ungerade sind | | | |
| c) wenn f gerade und g ungerade ist | | | |
| d) wenn f ungerade und g gerade ist | | | |

Aufgabe 2

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$ und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + px + q$ mit Parametern p und q .

Gibt es Parameterwerte für p und q , so dass $f \circ g = g \circ f$ ist?

Aufgabe 3

Sei $f(x) = 2x + 4$.

- a) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} zu f .
- b) Berechnen Sie $f^{-1} \circ f$ und $f \circ f^{-1}$.

Aufgabe 4

Eine Rentenversicherung mit Kapitalauszahlung bietet zwei Modelle an:

Modell A:

Die Beiträge werden dem Bruttolohn entnommen und zu Beginn mit 20% versteuert. Die Auszahlung der verzinsten Beiträge ist dafür steuerfrei.

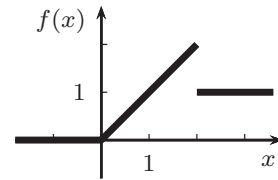
Modell B:

Die vollen Beiträge aus dem Bruttolohn werden verzinst. Am Ende wird der Auszahlungsbetrag mit 20% versteuert.

Welches Modell ist besser? Modellieren Sie das Problem mit Hilfe von Funktions-Verkettungen.

Aufgabe 5

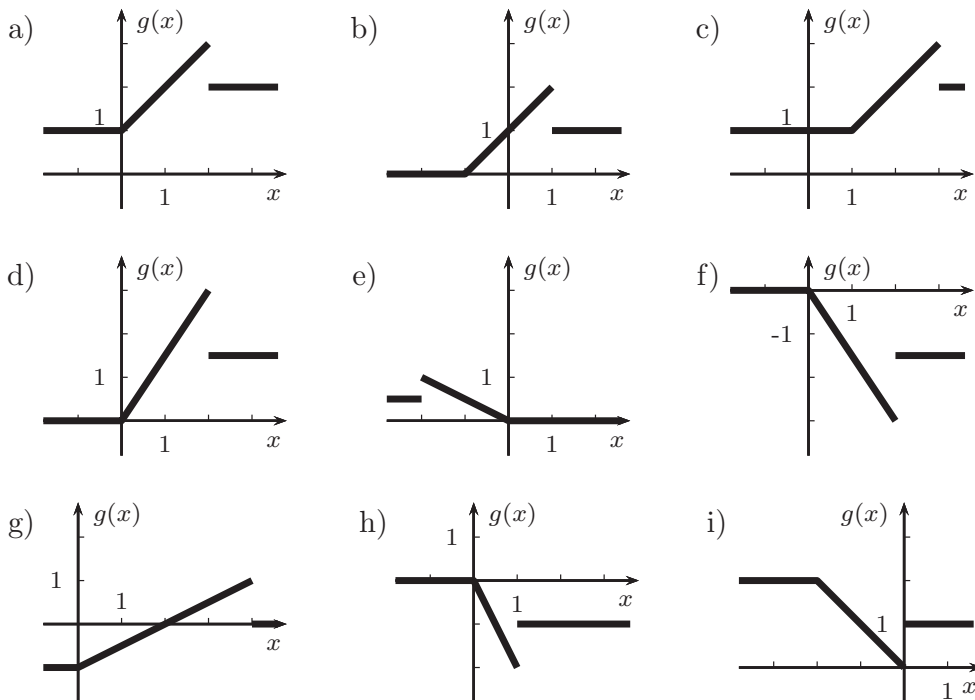
Das nebenstehende Diagramm zeigt den Funktionsgraph zur Funktion f .



1) Zeichnen Sie den Funktionsgraph zu

- a) $g(x) = f(x) - 2$, b) $g(x) = f(x + 2)$, c) $g(x) = f(2x)$,
 d) $g(x) = f(\frac{1}{2}x)$, e) $g(x) = 2 \cdot f(x)$, f) $g(x) = -f(x)$,
 g) $g(x) = f(-x)$, h) $g(x) = f(x-1) - 2$, i) $g(x) = f(-2x)$,
 j) $g(x) = f(2x) - 1$, k) $g(x) = \frac{1}{2} \cdot f(2x)$, l) $g(x) = 2 \cdot f(\frac{1}{2}x)$,
 m) $g(x) = 2f(x) - 1$, n) $g(x) = 3 - f(x)$, o) $g(x) = f(2x + 1)$,
 p) $g(x) = f(\frac{1}{2}x + 1)$, q) $g(x) = f(3 - x)$, r) $g(x) = -f(4 - 2x) + 3$.

2) Wie lautet der entsprechende Zusammenhang zwischen g und f bei folgenden Funktionsgraphen zu g ?



Aufgabe 6

Zeichnen Sie $\cos x$ und $\cos^2 x$ und plausibilisieren Sie den Zusammenhang

$$\cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1.$$

Aufgabe 7 (beispielhafte Klausuraufgabe, 12 Minuten)

In Hamburg schwankt die Wassertiefe der Elbe auf Grund von Ebbe und Flut zwischen 9m und 13m, wobei der Verlauf (sehr vereinfacht) als Sinus-förmig mit einer Periode von 12 Stunden modelliert werden kann.

- a) Skizzieren Sie den Verlauf und geben Sie eine Funktionsvorschrift an.
 b) Wie lang innerhalb einer Periode ist die Wassertiefe mindestens 12m?
 (Sie brauchen Ihre Angabe nicht zu begründen.)

Aufgabe 8

a) Sei $f(x) = 1.5 \cdot \cos(x - 2)$ und $g(x) = -2 \cdot \sin(x + 1)$.

Nutzen Sie die Additionstheoreme, um $f(x)$ und $g(x)$ als Überlagerung von Sinus- und Cosinus-Funktionen darzustellen, also in der Form

$$c \cdot \cos(x) + d \cdot \sin(x).$$

Verifizieren Sie mit Hilfe eines Funktionsplotters, dass Ihre Darstellungen wirklich den ursprünglichen Funktionen entsprechen.

b) Sei $f(x) = 2 \cos(x) + 3 \sin(x)$.

Gesucht sind r und φ , so dass gilt: $f(x) = r \cdot \cos(x - \varphi)$. (*)

1) Nutzen Sie einen Funktionsplotter, um r und φ approximativ zu bestimmen.

2) Welche Bedingungen müssen r und φ erfüllen, damit (*) gilt (Tipp: Additionstheorem)? Wie kann man diese Bedingungen geometrisch interpretieren (Tipp: Kreis)?

Welche Werte für r und φ sind die exakten?

Aufgabe 9

Sei $z_1 = 2 + j$ und $z_2 = j$. Stellen Sie

a) $z_1 + z_2$, b) $z_1 - z_2$, c) $z_1 \cdot z_2$.

zeichnerisch dar und berechnen Sie die Werte.

Aufgabe 10

Berechnen Sie die folgenden Werte, stellen Sie die Ausgangszahlen und das Ergebnis in der Gaußschen Zahlenebene dar und veranschaulichen Sie sich die geometrischen Zusammenhänge.

a) $(-1 + 2j) + (2 - j)$, b) $2 \cdot (2 - j)$,
c) $(-2 + 3j) \cdot (1 + j)$, d) $(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}j) \cdot (-2 - 4j)$.

Aufgabe 11

Konstruieren Sie grafisch $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ und $z_1 \cdot z_2$ zu den markierten Punkten.

