Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

WS 2025/26
22.01.2026

Übungsblatt 15 zur Vorlesung Höhere Mathematik 1

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ und $\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, indem Sie

1) die Matrizen auf Dreiecksform bringen,
2) die direkten Berechnungsformeln (Satz 8.5.3) benutzen.

b) Berechnen Sie $\det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

c) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $\det A$, $\det B$, $\det A^{-1}$ und $\det(A \cdot B)$.

(Tipp: A^{-1} wurde schon bei Blatt 14-2, Aufgabe 6, berechnet.)

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie (s. Satz 8.5.12)

Ist $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ und $\det A \neq 0$, so ist A invertierbar mit

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

b) Testen Sie die Formel aus a) an $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ (vgl. Blatt 14-2, Aufgabe 4).

Aufgabe 3

Berechnen Sie in Abhängigkeit vom Parameter c die Determinante zu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & c \end{pmatrix}.$$

Für welche Werte von c ist A invertierbar?

(Vgl. Blatt 11-2, Aufgabe 5, und Blatt 14-2, Aufgabe 5.)

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die Lösung der Gleichungssysteme

a) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 4 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 \qquad + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

mit Hilfe der Cramerschen Regel. (Zu b) vgl. Blatt 13-2, Aufgabe 1, a).)

Aufgabe 5

Zeigen Sie:

Ist A orthogonal (d.h. $A^{-1} = A^T$, s. Blatt 14-2, Aufgabe 7), so ist $|\det(A)| = 1$.

Aufgabe 6

a) Überlegen Sie sich, dass die Berechnung der Fläche eines Parallelogramms in der zweidimensionalen Ebene einerseits mittels Einbettung ins Dreidimensionale und des Vektorprodukts und andererseits als Determinante der aufspannenden Vektoren auf das gleiche Ergebnis führt.

b) Überlegen Sie sich (mittels der Eigenschaften von Vektor- und Skalarprodukt), dass für Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ das Volumen des von a, b und c aufgespannten Spats durch $|(a \times b) \cdot c|$ gegeben ist.

Betrachten Sie ggf. zunächst den Spezialfall, dass a, b und c paarweise zueinander senkrecht stehen.

c) Rechnen Sie nach, dass für $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und der Matrix $A = (a\ b\ c)$, die aus den Vektoren a, b und c als Spalten besteht, gilt:

$$\det A = (a \times b) \cdot c.$$

Aufgabe 7

Definition:

Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *positiv definit*

$:\Leftrightarrow$ für alle $x \neq 0$ gilt $x^T Ax > 0$.

a) Zeigen Sie, dass $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ positiv definit ist, indem Sie die Komponentendarstellung von $x^T Ax$ betrachten und diese als Summe zweier Quadrate darstellen.

b) Zeigen Sie, dass $A = C \cdot C^T$ bei regulärem $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiv definit ist.

Bemerkung: Man kann zeigen, dass auch die Umkehrung von b) gilt: Zu jeder positiv definiten Matrix A gibt es eine reguläre Matrix C mit $A = C \cdot C^T$ (*Cholesky-Zerlegung* von A).

Satz:

Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist positiv definit

$\Leftrightarrow$ sämtliche Hauptunterdeterminanten sind positiv.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ ist positiv definit, da

1) $\det(3) = 3 > 0$, 2) $\det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 > 0$, 3) $\det(A) = 2 > 0$.

c) Nutzen Sie den Satz, um zu zeigen, dass $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ positiv definit ist.

(Vgl. a)).

d) Untersuchen Sie, ob

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

positiv definit sind.

e) Testen Sie bei positiv definitem A_i aus d) für verschiedene Vektoren $x \neq 0$, dass $x^T Ax > 0$ ist.

f) Finden Sie für nicht positiv definites A_i aus d) ein $x \neq 0$ mit $x^T Ax \leq 0$.