

Übungsblatt 13-2 zur Vorlesung Höhere Mathematik 1

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Lösungen zu den folgenden Gleichungssystemen.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ & x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ & 2x_1 + x_3 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2 \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2, \\ & 3x_2 - 2x_3 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ & -x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_5 = 2 \\ & -2x_1 + x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 1. \\ & x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = -1 \\ & 2x_1 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Im Folgenden sind die auf Zeilen-Stufen-Form gebrachten erweiterten Koeffizientenmatrizen zu linearen Gleichungssystemen gegeben. Wie lautet jeweils die Lösungsmenge?

$$\text{a)} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

$$\text{c)} \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \end{array} \right),$$

$$\text{b)} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

$$\text{d)} \quad \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Aufgabe 3

Betrachtet wird das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_5 &= 3 \\ x_3 - x_4 + x_5 &= 1 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 + x_4 + 5x_5 &= 1 \end{aligned}$$

- Bestimmen Sie eine spezielle Lösung.
- Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraums zum zugehörigen homogenen Gleichungssystem.
- Wie sieht die allgemeine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems aus?

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die Lösungsmengen zu den folgenden Gleichungssystemen.

$$\begin{aligned} \text{a) } x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= 4 \\ x_2 + 2x_3 &= 2 \quad , \\ 2x_1 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 &= 1 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_5 &= 2 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 &= -1 \quad . \\ 2x_1 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 &= 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 5

Bestimmen Sie die Schnittmenge der Ebenen

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

und

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \gamma, \delta \in \mathbb{R} \right\},$$

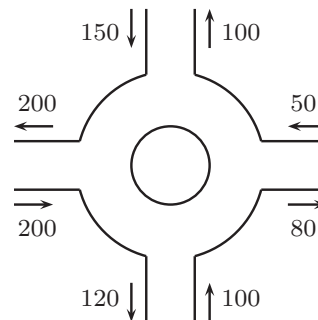
indem Sie

- die Parameterdarstellungen gleichsetzen,
- die Normalendarstellungen von E_1 und E_2 verwenden.

Aufgabe 6

Bei einer Verkehrszählung an einem Kreisverkehr werden die nebenstehenden Zahlen gemessen (Autos pro Stunde).

- Stellen Sie ein Gleichungssystem für die Belastung der einzelnen Abschnitte des Kreisverkehrs auf.
- Bestimmen Sie die Lösung des Gleichungssystems.



Aufgabe 7 (beispielhafte Klausuraufgabe, 10 Minuten)

Wie kann der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

dargestellt werden?

Aufgabe 8

Für welches Polynom p dritten Grades gilt

$$p(-1) = -3, \quad p(0) = 3, \quad p(1) = 1 \quad \text{und} \quad p(2) = 3?$$

Aufgabe 9 (beispielhafte Klausuraufgabe, 15 Minuten)

Ein metallverarbeitender Betrieb hat vier Stahlsorten auf Lager, die jeweils Legierungen aus Eisen, Chrom und Nickel sind:

	Eisen	Chrom	Nickel
Sorte 1	90%	0%	10%
Sorte 2	70%	10%	20%
Sorte 3	60%	20%	20%
Sorte 4	40%	20%	40%

Der Betrieb will durch eine Mischung daraus eine Tonne bestehend aus

$$60\% \text{ Eisen, } 10\% \text{ Chrom, } 30\% \text{ Nickel}$$

herstellen.

Ist das möglich? Wenn ja: wie? Wenn nein: warum nicht?