

Übungsblatt 13-1 zur Vorlesung Höhere Mathematik 1

Aufgabe 1

Berechnen Sie

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

Schreiben Sie das folgende Gleichungssystem in Matrix-Vektor-Schreibweise:

$$\begin{aligned} x_1 & - 5x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 & - x_4 = 2 \\ 4x_2 & + 3x_4 = -1 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Manche chemische Reaktionen können in beiden Richtungen stattfinden, z.B. die Reaktion von $2NO_2$ (Stickstoffdioxid) zu N_2O_4 (Distickstofftetroxid) und umgekehrt die Rückreaktion von N_2O_4 in $2NO_2$.

Bei einer bestimmten Temperatur wandeln sich pro Minute 20% des vorhandenen NO_2 in N_2O_4 um und umgekehrt 30% des vorhandenen N_2O_4 in NO_2 .

- a) Welche Mengen NO_2 und N_2O_4 hat man nach einer Minute, wenn es anfangs 100g NO_2 und 150g N_2O_4 sind?

Formulieren Sie den Zusammenhang als Matrix-Vektor-Multiplikation.

- b) Wie ist es nach zwei und drei Minuten?

Aufgabe 4

Mutter Beimer will verschiedene Weihnachtsplätzchen backen. Sie hat drei Rezepte:

Sandplätzchen

200g Butter
150g Zucker
2 Eier
375g Mehl

Mandelhörnchen

200g Butter
100g Zucker
250g Mehl
100g Mandeln

Makronen

150g Zucker
2 Eier
150g Mandeln

Da die Großfamilie zu Besuch kommt, will Mutter Beimer 4mal Sandplätzchen, 2mal Mandelhörnchen und 3mal Makronen backen. Wieviel Zutaten braucht sie?

Formulieren Sie den Sachverhalt als Matrix-Vektor-Multiplikation.

Aufgabe 5

Ein Lebensmittelhändler hat m Filialen F_1, F_2, \dots, F_m . In jeder Filiale hat er die gleichen n Artikel A_1, \dots, A_n . Zum Jahreswechsel wird überall Inventur gemacht. Die Anzahl von A_k in Filiale F_l sei $a(F_l, A_k)$. In der internen Buchführung wird ein Artikel A_k mit dem Preis p_k bewertet. Wie groß ist der Warenwert in den einzelnen Filialen?

Formulieren Sie den Sachverhalt als Matrix-Vektor-Multiplikation.

Aufgabe 6

Sei $M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ und $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie (mit einem Taschenrechner) $\vec{a}' = M \cdot \vec{a}$, $\vec{b}' = M \cdot \vec{b}$ und $\vec{c}' = M \cdot \vec{c}$ und zeichnen Sie in einem Koordinatensystem Dreiecke mit den entsprechenden Punkten A, B und C bzw. A', B' und C' . Fällt Ihnen etwas auf?

Aufgabe 7

Sei $M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$.

- Sei W der Einheitswürfel im \mathbb{R}^3 . Berechnen Sie für jede Ecke \vec{p} von W den Punkt $M \cdot \vec{p}$ und zeichnen Sie ihn in ein zweidimensionales Koordinatensystem. Verbinden Sie die Punkte, deren entsprechende Ecken in W durch eine Kante verbunden sind.
- Zeigen Sie, dass $M \cdot \vec{p}$ die Projektion eines Punktes $\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ auf die (x, z) -Ebene E_{xz} in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist, indem Sie den Schnittpunkt von E_{xz} mit einer Geraden mit Richtung \vec{v} durch einen beliebigen Punkt $\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ berechnen.
- Wie kann man mit Hilfe einer Matrix M die Projektion eines Punktes $\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ auf die (x, y) -Ebene E_{xy} in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ darstellen?

Aufgabe 8

Betrachtet wird das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (\text{I})$$

und das zugehörige homogene System

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{H})$$

- Geben Sie (durch Raten) zwei verschiedene Lösungen $x_{h,1}$ und $x_{h,2}$ des homogenen Systems (H) an.
- Verifizieren Sie, dass auch $x_{h,1} + x_{h,2}$, $x_{h,1} - x_{h,2}$ und $3 \cdot x_{h,1}$ Lösungen von (H) sind.
- Geben Sie (durch Raten) eine Lösung x_s des inhomogenen Systems (I) an.
- Verifizieren Sie, dass auch $x_s + x_{h,1}$, $x_s + 2 \cdot x_{h,2}$ und $x_s + 2 \cdot x_{h,1} + x_{h,2}$ Lösungen von (I) sind.
- Geben Sie (durch Raten) eine weitere Lösung $x_{s,2}$ des inhomogenen Systems (I) an.
- Verifizieren Sie, dass $x_0 = x_{s,2} - x_s$ (also $x_{s,2} = x_s + x_0$) eine Lösung des homogenen Systems (H) ist.
- Überlegen Sie sich allgemein, warum die Verifikation in b), d) und f) funktionieren.

Aufgabe 9

Betrachtet wird das inhomogene Gleichungssystem $Ax = b$ ($b \neq 0$) (I) und das zugehörige homogene System $Ax = 0$ (H). $x_{h,1}$ und $x_{h,2}$ seien zwei Lösungen von (H), $x_{s,1}$ und $x_{s,2}$ zwei Lösungen von (I)

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- $x_{h,1} + x_{h,2}$ ist Lösung von (H).
- $x_{s,1} - x_{h,1}$ ist Lösung von (H).
- $x_{s,1} - x_{h,1}$ ist Lösung von (I).
- $x_{s,1} - x_{s,2}$ ist Lösung von (H).
- $2 \cdot x_{s,1} - x_{s,2}$ ist Lösung von (I).
- Jedes x der Form $x = \alpha_1 \cdot x_{h,1} + \alpha_2 \cdot x_{h,2}$ ($\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$) ist Lösung von (H).
- Jedes x der Form $x = \alpha_1 \cdot x_{s,1} + \alpha_2 \cdot x_{s,2}$ ($\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$) ist Lösung von (I).
- Jedes x der Form $x = x_{s,1} + \alpha_1 \cdot x_{h,1} + \alpha_2 \cdot x_{h,2}$ ($\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$) ist Lösung von (I).