

Übungsblatt 9-1 zur Vorlesung Höhere Mathematik 1

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x}, & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{\cos x - 1}, \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{\ln x}}, & \text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right). \end{array}$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^2) - 1}{x^3 \sin x}$

- mit Hilfe der Potenzreihendarstellungen,
- mit der Regel von de l'Hospital.

Aufgabe 3

Betrachtet werden die Grenzwerte

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad \text{und} \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}.$$

- Was ergibt sich bei der Anwendung der Regel von de l'Hospital?
- Bestimmen Sie die Grenzwerte.

(Tipp zu 1): nutzen Sie die Definitionen von $\sinh x$ und $\cosh x$.)

Aufgabe 4

Was ergibt die Anwendung des Newton-Verfahrens auf die Funktion

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 3}$$

mit den Startwerten

- $x_0 = 0.5$,
- $x_0 = 1$,
- $x_0 = 1.5$?

(Nutzen Sie einen Taschenrechner.) Skizzieren Sie die Situationen!

Aufgabe 5

Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen der Funktion

$$f(x) = x^3 - 3x + 1,$$

skizzieren Sie mit diesen Informationen den Funktionsgraph, und bestimmen Sie (mit Hilfe eines Taschenrechners) Näherungen für sämtliche Nullstellen mittels des Newton-Verfahrens.

Aufgabe 6 (Fortsetzung von Blatt 7-1, Aufgabe 8)

Bestimmen Sie mit Hilfe des Newton-Verfahrens ein a , das

$$25 = 2a \cdot \sinh \frac{10}{a}$$

erfüllt. Führen Sie dabei soviel Schritte durch, bis der Abstand zweier aufeinander folgender Iterationslösungen kleiner als 0.001 ist.

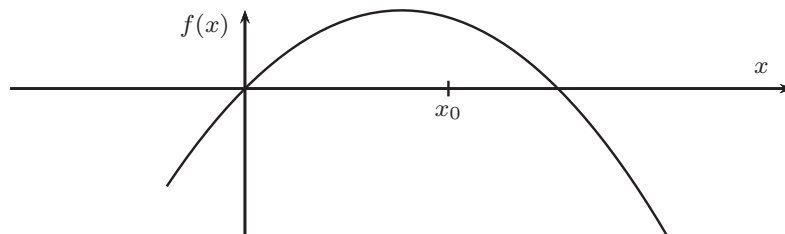
Vergleichen Sie die Anzahl der Schritte mit der beim Bisektionsverfahren (s. Blatt 7-1, Aufgabe 8).

Aufgabe 7

- Zeigen Sie, dass man nur Multiplikationen und Additionen benötigt, wenn man numerisch $x = \frac{1}{a}$ als Nullstelle der Funktion $f(x) = \frac{1}{x} - a$ gemäß des Newton-Verfahrens berechnet.
- Zeigen Sie, dass die Rekursionsvorschrift $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{c}{2x_n}$ (vgl. Blatt 5, Aufgabe 5, b)) der Newton-Iteration zur Bestimmung von \sqrt{c} als Nullstelle von $f(x) = x^2 - c$ entspricht.

Aufgabe 8 (beispielhafte Klausuraufgabe, 4 + 4 = 8 Minuten)

- Skizzieren Sie näherungsweise die Lage von x_1 und x_2 bei Durchführung des Newton-Verfahrens zur Bestimmung einer Nullstelle der abgebildeten Funktion $f(x)$ ausgehend von x_0 .



- Führen Sie ausgehend von $x_0 = 1$ einen Schritt des Newton-Verfahrens zur Bestimmung einer Nullstelle durch zu

$$f(x) = x^3 - 4x + 2.$$