Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

WS 2024/25
14.11.2024

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Die Aufgaben entstammen meinem *Arbeitsbuch höhere Mathematik*, Springer-Verlag

Übungsblatt 7-1 zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

Aufgabe 1

Gegeben sind die Funktionen

$$f : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin\frac{1}{x} \qquad \text{und} \qquad g : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R},\ g(x) = x \cdot \sin\frac{1}{x}.$$

Wie verhalten sich die Funktionen, wenn man sich mit dem Argument x der Null von rechts annähert? Existieren $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$ bzw. $\lim\limits_{x\to 0+} g(x)$?

Skizzieren Sie die Funktionsgrafen.

Aufgabe 2

Gegeben sind die Funktionen

$$H : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ H(x) = \begin{cases} 0 \text{ , falls } x \leq 0 \\ 1 \text{ , falls } x > 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2.$$

Bestimmen Sie $H(\lim\limits_{x\to 0} f(x))$ und $\lim\limits_{x\to 0} H(f(x))$.

Aufgabe 3

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte unter zu Hilfenahme der Potenzreihenentwicklungen.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(2x)}{x^2}$, c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x\cos x}{x^3}$,

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{\cosh x - 1}$, e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{x}$.

Aufgabe 4

Geben Sie die folgenden Grenzwerte (in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$) an:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3^x}{x^3}$, b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+x}{4^x}$, c) $\lim\limits_{x\to\infty} 3^{-x}\cdot x^5$,

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} 4^x\cdot x^3$, e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^x \cdot x^2$, f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2^x}{x}$,

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+3x-1}{x+2}$, h) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-1}{2x^2+x+1}$, i) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+4}{4x-1}$,

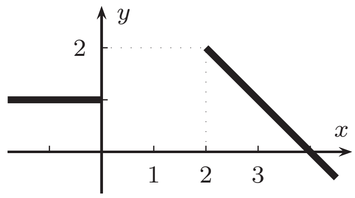
j) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x-1)^2}{x^2+1}$, k) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{1-x^2}$, l) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{1-x^2}$,

m) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\log_2 x}$, n) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x}$, o) $\lim\limits_{x\to 0+} x^2\cdot\log x$,

p) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{x}{\ln x}$, q) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{2^{\frac{1}{x}}}{x}$, r) $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{2^{\frac{1}{x}}}{x}$.

Aufgabe 5

Die Funktion



$$f(x) \;=\; \begin{cases} 1, & \text{für } x < 0 \\ 4 - x, & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

soll für $x \in [0, 2]$ so definiert werden, dass f stetig ist.

Wie kann man das möglichst einfach machen?

Aufgabe 6

Für welche Kombination von Parametern c und a ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) \;=\; \begin{cases} cx^2, & \text{für } x < 2, \\ \frac{1}{2}x + a, & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

stetig? Gibt es auch eine Kombination mit $c = a$?

Aufgabe 7

Geben Sie die Nullstellen von $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 3$ mit Hilfe des Bisektionsverfahrens mit einer Genauigkeit kleiner 0.01 an.

(Statt das Verfahren von Hand durchzuführen, bietet es sich an, ein kleines Programm zu schreiben.)

Aufgabe 8 (Fortsetzung von Blatt 2-1, Aufgabe 10)

Bestimmen Sie mit Hilfe des Bisektionsverfahrens ein a, das

$$25 \;=\; 2a \cdot \sinh \frac{10}{a}$$

erfüllt mit einer Genauigkeit kleiner 0.001.

Aufgabe 9 (beispielhafte Klausuraufgabe, 10 Minuten)

Betrachtet wird das Bisektionsverfahren zur Bestimmung einer Nullstelle von

$$f(x) = x^3 + 2x - 4.$$

a) Führen Sie zwei Schritte des Bisektionsverfahrens ausgehend von 0 und 2 durch, und geben Sie ein Intervall der Länge 0.5 an, in dem eine Nullstelle liegt.

b) Wieviel Schritte muss man mit dem Bisektionsverfahren machen, um ausgehend von 0 und 2 ein Intervall der Länge 10^{-6} anzugeben, in dem eine Nullstelle liegt?

   Geben Sie die Anzahl formelmäßig und näherungsweise (mit der groben Abschätzung $2^3 \approx 10$) an.