Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

WS 2024/25
07.11.2024

Die Aufgaben entstammen meinem *Arbeitsbuch höhere Mathematik*, Springer-Verlag

Übungsblatt 6-1 zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

Aufgabe 1

Sei $a_k = \frac{k}{2^k}$. Berechnen Sie mit dem Taschenrechner einige Folgenglieder von $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sowie die ersten Partialsummen s_n der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Aufgabe 2

Sei $a_k = \frac{k}{(k+1)!}$. (Zur Erinnerung: $k! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$.)

a) Berechnen Sie mit einem Taschenrechner einige Folgenglieder von $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sowie die ersten Partialsummen s_n der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

b) Zeigen Sie: $a_k = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$.

c) Nutzen Sie die Darstellung aus b) zur Berechnung von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Aufgabe 3

Gegeben ist die Reihe $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + - \ldots$.

a) Wie lauten die a_k bei einer Darstellung der Summe als $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$?

b) Berechnen Sie den Reihenwert.

Aufgabe 4

Herr Mayer schließt einen Ratensparvertrag ab: Er zahlt zu Beginn jeden Jahres 1000€ ein. Das Guthaben wird (mit Zinseszins) zu 4% verzinst.

Welches Guthaben hat Herr Mayer nach 30 Jahren?

Aufgabe 5

Berechnen Sie

a) $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k$, b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}$, c) $\sum_{k=1}^{\infty}0.8^k$, d) $\sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^m$.

(Zu c) und d) vgl. Aufgabe 6.)

Aufgabe 6

Zeigen Sie, dass für $|q|<1$ gilt: $\sum_{k=k_0}^{\infty} q^k = \frac{q^{k_0}}{1-q}$.

Aufgabe 7

a) Visualisieren Sie die Partialsummen der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit den komplexen Summanden $a_k = \left(\frac{1}{2}\mathrm{j}\right)^k$ in der Gaußschen Zahlenebene und berechnen Sie den Reihenwert.

b) Was ergibt $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{j})^n$ und $\sum_{l=0}^{\infty}(0.8+0.7\mathrm{j})^l$?

Aufgabe 8 (beispielhafte Klausuraufgabe, 10 Minuten)

Miniland macht Schulden, dieses Jahr 1000 €. Von Jahr zu Jahr soll die Neuverschuldung auf $\frac{2}{3}$ des Vorjahres reduziert werden.

Wieviel Gesamtschulden macht Miniland?

Aufgabe 9

Bitcoin entstehen dadurch, dass Miner, die neue Blöcke erschaffen haben, neue Bitcoin als Belohnung erhalten. Anfangs (Januar 2009) waren das 50 Bitcoin. Alle 210000 Blöcke wird die Belohnung halbiert. Dabei ist das Mining so konstruiert, dass im Durchschnitt alle 10 Minuten ein neuer Block erzeugt wird.

a) Wie groß ist die Bitcoin-Menge, die in Summe jemals entstehen wird?

b) Wie groß ist die Menge an Bitcoins, die bis Ende 2020 erzeugt wurde, wenn man davon ausgeht, dass vom 01.01.2009 an alle 10 Minuten ein neuer Block erzeugt wurde?

c) Wie groß ist die Menge an Bitcoins, die bis Ende 2050 erzeugt werden, wenn man davon ausgeht, dass vom 01.01.2009 an alle 10 Minuten ein neuer Block erzeugt wurde/wird?

Aufgabe 10

Achilles und die Schildkröte veranstalten ein Wettrennen. Achilles lässt der Schildkröte einen Vorsprung von $\Delta s_0 = 10\,\mathrm{m}$. Er spurtet mit einer Geschwindigkeit von $10\,{}^{\mathrm{m}}\!/\!{}_{\mathrm{s}}$, während die Schildkröte $1\,{}^{\mathrm{m}}\!/\!{}_{\mathrm{s}}$ schafft.

Sei Δt_0 die Zeit, die Achilles braucht, um den gegebenen Vorsprung Δs_0 zurückzulegen, Δs_1 die Strecke, die sich die Schildkröte in der Zeit Δt_0 als neuen Vorsprung erarbeitet. Allgemein sei

Δt_n die Zeit, die Achilles für die Strecke Δs_n braucht,

Δs_{n+1} die Strecke, die die Schildkröte in der Zeit Δt_n zurücklegt.

a) Überlegen Sie sich, dass gilt: $\Delta t_n = \frac{1}{10^n}\,\mathrm{s}$.

b) Was ergibt die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \Delta t_n$?

Wie lässt sich damit das Paradoxon, dass die Schildkröte bei der Betrachtung immer einen Vorsprung vor Achilles hat, auflösen?

Aufgabe 11

Welche der folgenden Reihen konvergieren in $\mathbb{R}$?

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$, b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+2}{k^2+4k-1}$, c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+2}{k^4+3k}$, d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-3}{k+5}$,

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$, f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot 0.8^k$, g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1.2^k}{k^4}$, h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{0.5^k}$,

i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$, j) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{k^2}\right)$, k) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k-k}{3^k+1}$, l) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k+1}{k\cdot 2^k}$.