

Übungsblatt 5 zur Vorlesung Höhere Mathematik 1

Aufgabe 1

Die Folgen $\left(\frac{2n}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ und $\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergieren.

Stellen Sie jeweils eine Vermutung bzgl. des Grenzwertes a auf und geben Sie dann jeweils ein N an, so dass für $n \geq N$ für die Folgenglieder a_n gilt:

$$|a_n - a| < \frac{1}{100} \quad \text{bzw.} \quad |a_n - a| < 10^{-8}.$$

Aufgabe 2

Sind die angegebenen Folgen konvergent?

- a) $a_n = \pi$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- b) $b_n = 0$ für alle n , die nicht durch 10 teilbar sind; ist n Vielfaches von 10, so ist $b_n = 1$.
- c) $c_n = 0$ für alle n außer für Zehnerpotenzen; für Zehnerpotenzen n , also $n = 10^k$, ist $c_n = 1$.
- d) $d_n = 0$ für alle n außer für Zehnerpotenzen; es ist $d_1 = 1$, und ist $n = 10^k$, $k \geq 1$, so ist $d_n = \frac{1}{k}$;

Aufgabe 3

Geben Sie den Grenzwert der folgenden Folgen in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ an.

- a) $\left(\frac{2n-1}{4n+3}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, b) $\left(\frac{3n}{n^2-3}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, c) $\left(\frac{2n^2+3}{2-n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$,
- d) $\left(\frac{n^2}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, e) $\left(\frac{(n+2)^2}{2n^2+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, f) $\left(\frac{n^3-3n^2+1}{1-n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$,
- g) $\left(\frac{4n+2}{(3n-1)^2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, h) $\left(\frac{3n^2}{(2n+1)^2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, i) $\left(\frac{n(4n-1)^2}{(2n+1)^3}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die Grenzwerte von

- a) $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})_{n \in \mathbb{N}}$, b) $(\sqrt{n^2+n} - n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(Tipp: Formen Sie die Ausdrücke durch geschickte Erweiterung mittels der dritten binomischen Formel so um, dass Sie das Konvergenzverhalten klar erkennen können.)

Aufgabe 5

a) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ erfülle $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$.

Welchen Grenzwert hat die Folge, falls sie konvergiert?

b) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{c}{2a_n}$$

mit einem Parameter $c \in \mathbb{R}^{>0}$ konvergiert. (Das brauchen Sie nicht zu zeigen). Welchen Grenzwert hat die Folge? (Vgl. Blatt 4-2, Aufgabe 9, e).)

Aufgabe 6

Geben Sie jeweils reelle Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ an, die

a) $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ und $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ erfüllen und für die gilt

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 3, \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = -\infty.$$

b) $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ und $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ erfüllen und für die gilt

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0, \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 3, \\ 3) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \infty, \quad 4) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = -\infty.$$

Aufgabe 7

Geben Sie die Grenzwerte (in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$) der folgenden Folgen an.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \left(\frac{n^4}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}, & \text{b) } \left(\frac{3^n}{n^3}\right)_{n \in \mathbb{N}}, & \text{c) } \left(n^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}, \\ \text{d) } \left(\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}, & \text{e) } \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}, & \text{f) } \left(\frac{n^2}{\sqrt{2n^4+n}}\right)_{n \in \mathbb{N}}, \\ \text{g) } (\sqrt[3]{n})_{n \in \mathbb{N}}, & \text{h) } \left(\frac{n^2+n \cdot 2^n}{3^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}, & \text{i) } \left(\frac{1-2^n}{n^3+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}. \end{array}$$

Aufgabe 8

a) Sie wollen 1000 Euro für ein Jahr anlegen. Bank A bietet Ihnen für das Jahr 4% Zinsen. Bank B bietet nur 3,98%, schreibt Ihnen aber nach einem halben Jahr schon die bis dahin fälligen Zinsen gut und verzinst sie dann mit. Bank C gibt nur 3,95%, wirbt aber mit monatlicher Gutschrift der aufgelaufenen Zinsen. Welches Angebot ist am günstigsten?

b) Wie lautet die Formel für Ihr Guthaben nach einem Jahr bei einem Zinssatz von p Prozent, wenn Ihnen die aufgelaufenen Zinsen n mal im Jahr gutgeschrieben werden?

c) Was ergibt sich bei b) für $n \rightarrow \infty$, also bei kontinuierlicher Zinsgutschrift?