Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

WS 2024/25
17.10.2024

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Übungsblatt 3-1 zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

Aufgabe 1

Geben Sie (ohne Gebrauch eines Taschenrechners) jeweils zwei ganze Zahlen an, zwischen denen die folgenden Werte liegen:

$$\sqrt{20}, \qquad \sqrt{80}, \qquad \sqrt[3]{20} \qquad \sqrt[3]{80}, \qquad \sqrt[5]{100}.$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die reellen Werte x, für die gilt:

a) $\sqrt{2+3x} = 2,$

b) $\sqrt{x-2} = \frac{1}{3}x,$

c) $\sqrt{1-x} = x-2,$

d) $\sqrt{32-16x} = x-5,$

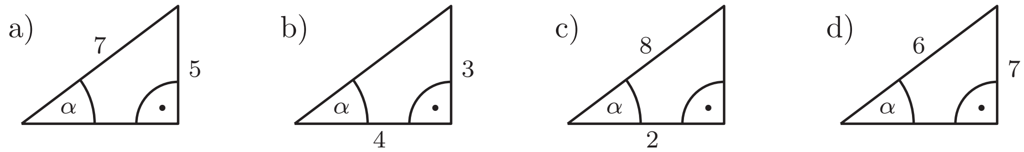
e) $\sqrt{x+2} = x,$

f) $\sqrt{8-4x} = x-3.$

(Beachten Sie, dass Quadrieren keine Äquivalenzumformung ist; es können sich „falsche Lösungen“ einschleichen!)

Aufgabe 3

Berechnen Sie den Winkel α (in Bogenmaß und Grad) in den abgebildeten Dreiecken. (Die Zeichnungen sind nicht maßstabsgetreu; nutzen Sie einen Taschenrechner)



Aufgabe 4

a) Welchen Winkel schließt die Gerade $y = \frac{1}{2}x$ mit der x-Achse ein?

b) Wie lautet der Zusammenhang zwischen der Steigung einer Geraden und dem Winkel zwischen der x-Achse und der Geraden allgemein.

Aufgabe 5

Offensichtlich gibt es im Intervall $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ ein x_1 mit $\sin x_1 = 0.8$ und im Intervall $[\pi, 2\pi]$ zwei Werte x_2 und x_3 mit $\sin x_2 = \sin x_3 = -0.8$.

Berechnen Sie diese Werte mithilfe der arcsin-Funktion Ihres Taschenrechners unter Ausnutzung von Symmetrieüberlegungen.

Die Aufgaben entstammen meinem *Arbeitsbuch höhere Mathematik*, Springer-Verlag

Aufgabe 6

Sind folgende Gleichungen lösbar? Falls ja: Geben Sie eine Lösung an!

Tipp: Nutzen Sie ggf. Substitutionen und Umformungen zwischen den trigonometrischen Funktionen.

a) $\cos^2 x - 5\cos x + 6 \;=\; 0,$ b) $\sin^2 y - 2\sin y + \frac{3}{4} \;=\; 0,$

c) $\cos^2 a + 2\sin a - 2 \;=\; 0,$ d) $\tan r \;=\; 2\sin r.$

Aufgabe 7

Überlegen Sie sich, zwischen welchen zwei ganzen Zahlen die Lösungen x zu den folgenden Gleichungen liegen.

a) $10^x = 20,$ b) $2^x = 10,$ c) $3^x = 0.5,$ d) $8^x = 3,$

e) $0.7^x = 0.3,$ f) $4^x = 1.1,$ g) $0.5^x = 4,$ h) $0.2^x = 0.5.$

Wie kann man die Lösung mit Hilfe des Logarithmus ausdrücken?

Berechnen Sie die genaue Lösung mit einem Taschenrechner.

Aufgabe 8

Für welche Variablenwerte sind die folgenden Gleichungen erfüllt?

(Tipp: Nutzen Sie Logarithmenregeln zur Umformung!)

a) $\log_c 8 \;=\; 3,$ b) $\log_2 z \;=\; 4,$

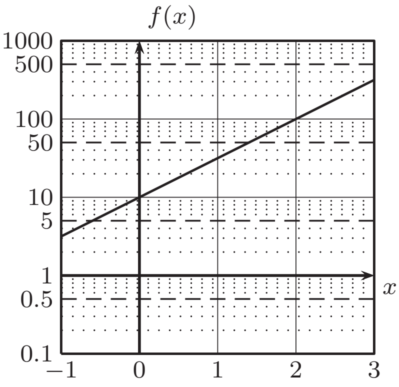
c) $\log_5(b^2) + \log_5 b \;=\; 6,$ d) $\log_2(8x) + \log_2(4x) + \log_2 \frac{x}{2} \;=\; 1,$

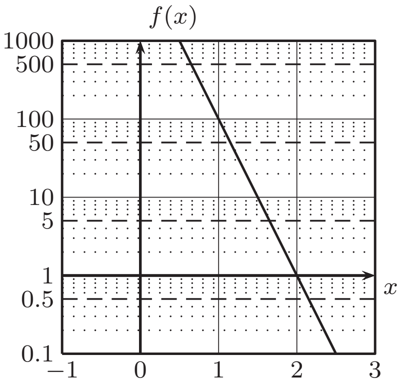
e) $3 \cdot \log_{10} x + \log_{10} \sqrt{x} \;=\; 7,$ f) $\log_3 \sqrt{a} - \log_3 \sqrt[3]{a} \;=\; \frac{1}{3},$

g) $\log_3 x - \log_9 x \;=\; 1,$ h) $\log_a 4 + \log_a 9 \;=\; 2.$

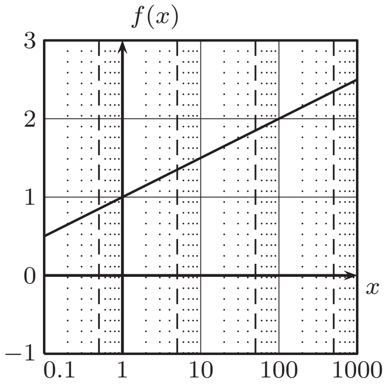
Aufgabe 9

Welche Funktionen sind in den folgenden Schaubildern (mit zum Teil logarithmischer Skalierung) durch die Geraden dargestellt?

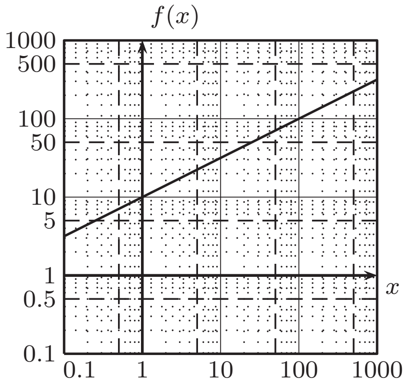
a) 

b) 

c)



d)



Aufgabe 10

Signal-zu-Rausch-Verhältnisse (*SNR: signal-to-noise-ratio*) werden häufig in Dezibel (dB) angegeben. Dabei ist Bel (B) der Logarithmus zur Basis 10 des Verhältnisses. Zehn Dezibel entsprechen einem Bel, so dass sich mit der Signalleistung S und der Rauschleistung R das SNR in dB ergibt durch

$$\mathrm{SNR} \;=\; 10 \cdot \log_{10} \frac{S}{R} \;[\mathrm{dB}].$$

a) Welchen Wert hat das SNR bei einer Signalleistung $S = 10\,\mathrm{W}$ und einer Rauschleistung von $R = 0.1\,\mathrm{W}$?

b) Um wieviel ändert sich SNR, wenn man die Signalleistung verdoppelt?

Aufgabe 11

Zeigen Sie: Für die Umkehrfunktion arsinh zu $f(x) = \sinh x$ gilt:

$$\operatorname{arsinh} y \;=\; \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right).$$

Anleitung: Zur Bestimmung der Umkehrfunktion müssen Sie die Gleichung $f(x) = y$ nach x umstellen. Nutzen Sie dazu die Definition von $\sinh x$, führen Sie die Substitution $z = \mathrm{e}^x$ durch und stellen Sie die Gleichung zunächst nach z um.

Aufgabe 12

Der Bodensee ist ca. 50 km lang (Konstanz-Bregenz).

a) Wieviel steht der Bodensee über?

Genauer: Wie tief läge ein straff gespanntes Seil unter dem durch die Erdkrümmung aufgewölbten Wasserspiegel?

b) Wieviel kürzer ist das gespannte Seil gegenüber einem auf der Wasseroberfläche schwimmenden?

Stellen Sie zunächst eine Formel für die Höhe h bzw. die Längendifferenz Δl in Abhängigkeit vom Erdradius R und der Entfernung l zwischen Konstanz und Bregenz auf, bevor Sie die konkreten Werte einsetzen. (Es ist $R \approx 6370\,\mathrm{km}$.)

c) Welche Werte erhalten Sie für einen 100 m langen See?

(Nutzen Sie einen Taschenrechner.)