

Übungsblatt 12-2 zur Vorlesung Höhere Mathematik 1

Aufgabe 1

- a) Geben Sie eine Darstellung der Geraden g im \mathbb{R}^3 an, die durch

$$P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

verläuft.

Liegt $Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ auf g ?

- b) Geben Sie eine Darstellung der Geraden g im \mathbb{R}^4 an, die durch

$$P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

verläuft?

Aufgabe 2

Welche Punkte auf der Geraden $g = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ haben

- a) von $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ den Abstand 3, b) von $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ den Abstand 5?

Aufgabe 3

Betrachtet wird das Dreieck mit den Eckpunkten

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Gesucht ist der Lotfußpunkt L des Lots von C auf die Seite \overline{AB} bzw. auf die Gerade g , auf der diese Seite liegt.

Berechnen Sie L auf drei verschiedene Arten:

- Bestimmen Sie L als Schnittpunkt von g und der Geraden h , die durch C führt und senkrecht zu g ist.
- Bestimmen Sie L als den Punkt auf g , so dass der Verbindungsvektor von L zu C senkrecht auf dem Richtungsvektor von g steht.
- Bestimmen Sie L als nächstliegenden Punkt auf g an C , indem Sie den Abstand $d(\lambda)$ von C zu einem allgemeinen Punkt der Geraden g in Abhängigkeit von dem Parameter λ berechnen und die Minimalstelle der Funktion $d(\lambda)$ bestimmen.

Berechnen Sie schließlich die Höhe und damit die Fläche des Dreiecks.

Aufgabe 4

In Aufgabe 16 von Blatt 12-1 und Aufgabe 3 werden insgesamt fünf verschiedene Möglichkeiten zur Berechnung der Fläche eines ebenen Dreiecks betrachtet. Stellen Sie diese Möglichkeiten zusammen, und überlegen Sie, welche der Möglichkeiten auch in drei- und höherdimensionalen Räumen funktionieren.

Aufgabe 5

- a) Stellen Sie die Ebene durch die Punkte $P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ in Parameter- und in Normalendarstellung dar.

Testen Sie, ob der Punkt $Q = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ in der Ebene liegt.

- b) Stellen Sie die Ebene, die durch $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ führt und senkrecht zu $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist, in Parameter- und in Normalendarstellung dar.

Aufgabe 6

Stellen

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

und

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

die gleiche Ebene dar?

Überlegen Sie sich verschiedene Möglichkeiten, dies zu überprüfen.

Aufgabe 7

- a) Geben Sie eine Normalendarstellung der Geraden

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

sowie eine Darstellung $x_2 = f(x_1)$ für die Punkte $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ der Geraden an.

- b) Betrachtet wird die Hyperebene E im \mathbb{R}^4 , die durch

$$E = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 7 \right\}$$

beschrieben wird.

- b1) Geben Sie verschiedene Punkte P an, die in E liegen.

- b2) Geben Sie verschiedene Richtungsvektoren \vec{v} zu E an.

Aufgabe 8

Berechnen Sie die Schnittmenge von

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

mit der Geraden

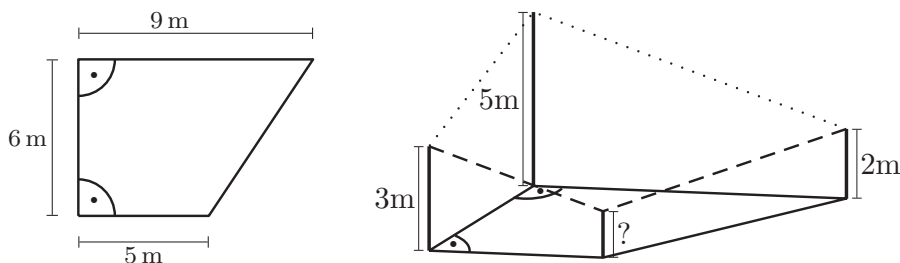
$$g = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

indem Sie

- die Parameterdarstellung von E benutzen.
- E in Normalendarstellung darstellen und diese nutzen.

Aufgabe 9 (beispielhafte Klausuraufgabe, 6 + 10 + 4 = 20 Minuten)

In Krummhausen wird ein Schuppen gebaut mit dem links abgebildeten Grundriss. An drei Ecken stehen schon (unterschiedlich hohe) Säulen (s. rechts).



- Wie groß ist der Winkel zwischen den (gepunktet dargestellten) Dachkanten an der 5m hohen Säule?
- Zeichnen Sie in die Abbildung rechts ein Koordinatensystem ein und geben Sie entsprechend Ihres Koordinatensystems eine Normalendarstellung für die durch die Dachfläche gebildete Ebene E an.
- Wie hoch muss die Säule an der vierten Ecke sein, damit ein ebenes Dach passend aufliegt?

***** Frohe Weihnachten und einen guten Übergang ins neue Jahr! *****

Aufgabe 10

Betrachtet wird die (Ursprungs-)Ebene

$$E = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bestimmen Sie den nächstgelegenen Punkt Q auf E an den Punkt $\vec{p} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf folgende Weisen:

- als Schnittpunkt der Ebene mit der Geraden, die durch P führt und einen zu E orthogonalen Richtungsvektor besitzt,
- als den Punkt auf E , so dass der Differenzvektor $\vec{p} - \vec{q}$ senkrecht auf den die Ebene aufspannenden Richtungsvektoren steht.

Aufgabe 11

Betrachtet wird der Vektorraum V der auf dem Intervall $[0; 2\pi]$ stetigen Funktionen mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) \cdot g(x) dx$$

und die Vektoren $f_1, f_2, f_3 \in V$ mit

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = \cos x \quad \text{und} \quad f_3(x) = \sin x$$

sowie $g \in V$ mit $g(x) = x$.

Welche Funktion auf der Ursprungs-Ebene, die durch f_1, f_2 und f_3 aufgespannt wird, liegt am nächsten an g ?

Anleitung: Gesucht ist die Linearkombination $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3$, so dass der Differenzvektor $g - f$ senkrecht auf den aufspannenden Vektoren f_i steht.

Tipp: Vergleiche Aufgabe 10, b).

***** Frohe Weihnachten und einen guten Übergang ins neue Jahr! *****