Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

WS 2024/25
19.12.2024

Übungsblatt 12-1 zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

Aufgabe 1

Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie $\|\vec{a}\|$.

b) Berechnen Sie $\|5\vec{a}\|$ einerseits, indem Sie zunächst die entsprechenden Vektoren $5\vec{a}$ und dann deren Norm berechnen und andererseits mit Hilfe von Satz 7.3.13, 1..

c) Oft will man zu einem Vektor $\vec{a}$ einen *normalisierten* Vektor haben, d.h. einen Vektor $\vec{b}$, der in die gleiche Richtung wie $\vec{a}$ zeigt (also $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$), und der die Länge 1 hat.

   Geben Sie jeweils einen normalisierten Vektor $\vec{b}$ zu den angegebenen Vektoren $\vec{a}$ an.

   Wie muss man dazu allgemein λ wählen?

Aufgabe 2

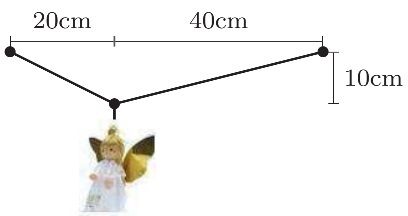
Welchen Abstand haben

a) die Punkte $P_1 = (1, 3)$ und $P_2 = (4, -1)$ im $\mathbb{R}^2$,

b) die Punkte $Q_1 = (1, 1, -1)$ und $Q_2 = (0, 0, 1)$ im $\mathbb{R}^3$?

c) die Punkte $R_1 = (1, 2, 3, 4)$ und $R_2 = (2, 1, 2, 1)$ im $\mathbb{R}^4$?

Aufgabe 3



Ein 100g schwerer Weihnachtsengel ist wie abgebildet an Fäden aufgehängt. Wie groß sind die (Zug-)Kräfte in den Fäden?

Anleitung: Die nach unten gerichtete Gewichtskraft des Engels muss dargestellt werden als Linearkombination von in Richtung der Fäden gerichteten Kraftvektoren. (Nutzen Sie einen Taschenrechner.)

Aufgabe 4

Ein Schiff will in nord-östliche Richtung fahren, also bezüglich eines entsprechenden Koordinatensystems in Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Seine Höchstgeschwindigkeit beträgt 13 Knoten. Die Geschwindigkeit der Meeresströmung, mit der das Schiff abtreibt, ist (in Knoten) $\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$.

In welche Richtung muss das Schiff steuern, damit es (mit der Meeresströmung zusammen) seinen anvisierten Kurs hält und möglichst schnell voran kommt?

Aufgabe 5

Berechnen Sie (wo nötig unter Benutzung eines Taschenrechners) den Winkel, den $\vec{a}$ und $\vec{b}$ einschließen, zu

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$,

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$,

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$,

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$,

e) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Zeichnen Sie in a) die Situation und messen Sie den berechneten Werte nach.

Versuchen Sie, sich die Vektoren und Winkel bei b), c) und d) vorzustellen.

Aufgabe 6

a) Wie lang ist die Diagonale in einem (dreidimensionalen) Würfel bei einer Kantenlänge 1?

Welchen Winkel schließt sie mit einer Kante ein?

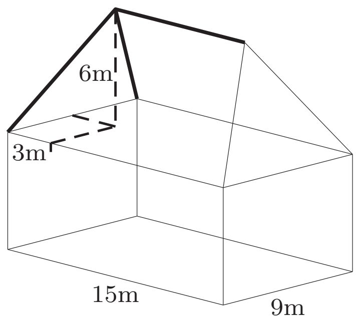
b) Welche Werte ergeben sich in einem n-dimensionalen Würfel?

c) Was ergibt sich bei b) für $n \to \infty$?

Aufgabe 7

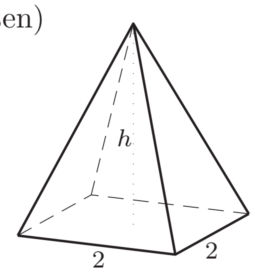
Welchen Winkel schließen die Dachkanten beim nebenstehend abgebildeten Walmdach untereinander bzw. mit dem Dachfirst ein?

Nutzen Sie einen Taschenrechner.



Aufgabe 8 (beispielhafte Klausuraufgabe, 10 Minuten)

Geben Sie einen formelmäßigen Ausdruck an, unter welchem Winkel sich die Kanten einer Pyramide mit Basislänge 2 und Höhe h an der Spitze treffen (s. Skizze).



Aufgabe 9

Geben Sie orthogonale Vektoren an zu

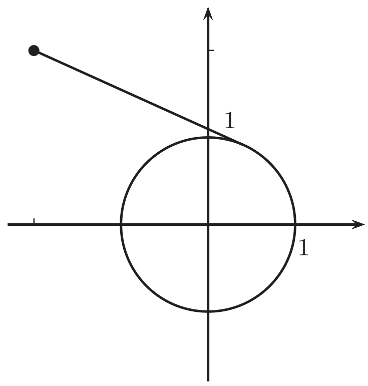
a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, e) $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 10 (vgl. Blatt 8-1, Aufgabe 14)

Das nebenstehende Bild zeigt schematisch eine Papieraufwicklung. Die Walze hat den Radius 1, die Papierbahn kommt vom Punkt $(-2, 2)$.

An welchem Punkt berührt die Papierbahn die Walze?

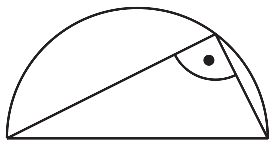
Anleitung: Stellen Sie den oberen Halbkreis der Walze als Funktion f dar und bestimmen Sie den Punkt X, bei dem der radiale Vektor senkrecht zum Verbindungsvektor von P zu X ist.



Aufgabe 11

Beweisen Sie den Satz des Thales:

Jeder Winkel im Halbkreis ist ein rechter Winkel.



Anleitung: Legen Sie das Koordinatensystem geeignet fest und stellen Sie den Halbkreis als Funktion dar. Beschreiben Sie dann die beiden Schenkel des Winkels als Vektoren und betrachten Sie deren Skalarprodukt.

Aufgabe 12

Betrachtet wird der Vektorraum V der auf dem Intervall $[0; 2\pi]$ stetigen Funktionen mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle \;=\; \int_0^{2\pi} f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

sowie die Vektoren $f_1,\ f_2,\ f_3 \in V$ mit

$$f_1(x) \;=\; 1 - \tfrac{1}{\pi}x, \qquad f_2(x) \;=\; \cos x \qquad \text{und} \qquad f_3(x) \;=\; \sin x.$$

a) Berechnen Sie die Skalarprodukte $\langle f_1, f_2 \rangle$ und $\langle f_1, f_3 \rangle$.

(Tipp: s. Blatt 11-1, Aufgabe 1, b1))

b) Bestimmen Sie die Längen $\|f_1\|$, $\|f_2\|$ und $\|f_3\|$.

c) Bestimmen Sie den Abstand von f_1 zu f_2 und den von f_1 zu f_3.

Veranschaulichen Sie sich die Situation.

Aufgabe 13

Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie den Winkel φ zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit Hilfe des Skalarprodukts.

b) Berechnen Sie $\vec{a} \times \vec{b}$.

c) Verifizieren Sie die Gleichung $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin\varphi$.

Aufgabe 14

a) Geben Sie $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ an mit

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \;\neq\; \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}).$$

b) Untersuchen Sie, ob die folgenden Gleichungen gelten ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$):

b1) $\quad \vec{a} \times (\lambda \cdot \vec{b}) \;=\; \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$,

b2) $\quad \vec{a} \times (\vec{c} \cdot \vec{b}) \;=\; \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$.

Aufgabe 15

Geben Sie mehrere Vektoren $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ an mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Überlegen Sie sich zunächst anschaulich, welche $\vec{b}$ in Frage kommen, und rechnen Sie dann.

Aufgabe 16

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms, das durch $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird,

1) durch die Formel „Seite mal Höhe“, indem Sie mit dem Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die Höhe berechnen,

2) indem Sie die Situation ins Dreidimensionale übertragen und das Vektorprodukt zu Hilfe nehmen.

b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(Tipp: Durch Verdoppelung eines Dreiecks kann man ein Parallelogramm erhalten.)