Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik
Prof. Georg Hoever

WS 2024/25
12.12.2024

Übungsblatt 11-1 zur Vorlesung Höhere Mathematik 1

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie mittels partieller Integration eine Stammfunktion zu

a1) $f(x) = x \cdot \cos(2x)$, a2) $f(x) = (x+1) \cdot \mathrm{e}^x$.

b) Bestimmen Sie den Wert der folgenden Integrale:

b1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos x \cdot x \, \mathrm{d}x$, b2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cdot x \, \mathrm{d}x$.

c) Bestimmen Sie $\displaystyle\int x \cdot \ln x \, \mathrm{d}x$.

Aufgabe 2

a) Gesucht ist eine Stammfunktion zu $f(x) = x^2 \cdot \cos x$.

Partielle Integration (Ableiten von x^2 und Aufleiten von $\cos x$) führt zu

$$\int x^2 \cdot \cos x \, \mathrm{d}x = x^2 \cdot \sin x - \int 2x \cdot \sin x \, \mathrm{d}x.$$

Das rechte Integral kann nun wieder partiell integriert werden.

a1) Was ergibt sich, wenn man dabei $2x$ auf- und $\sin x$ ableitet?

a2) Was ergibt sich, wenn man umgekehrt $2x$ ab- und $\sin x$ aufleitet?

b) Zur Bestimmung einer Stammfunktion zu

$$f(x) = \mathrm{e}^{3x} \cdot \sin(2x)$$

kann man zweimalige partielle Integration nutzen. Führen Sie wie in a) die zweite partielle Integration auf zwei verschiedene Arten durch. Was erhalten Sie?

(Tipp: Sie können jeweils das rechts entstehende Integral mit der linken Seite verrechnen.)

Aufgabe 3

a) Berechnen Sie mittels partieller Integration eine Stammfunktion zu

$$f(x) = \sin x \cdot \cos x \qquad \text{und} \qquad g(x) = \sin x \cdot \sin(2x).$$

b) Fallen Ihnen auch andere Wege zur Bestimmung von Stammfunktionen zu den Funktionen aus a) ein?

(Tipp: Additionstheoreme, s. Satz 1.1.55, 3., und Blatt 2-1, Aufgabe 6.)

c) Welchen Wert haben konkret

$$\int_0^{2\pi} \sin x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad \int_0^{2\pi} \sin x \cdot \sin(2x) \, \mathrm{d}x?$$

Aufgabe 4

Die *Gamma-Funktion* ist für $a > 0$ definiert durch

$$\Gamma(a) \;:=\; \int_0^{\infty} x^{a-1} \cdot \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x.$$

a) Berechnen Sie $\Gamma(1)$, $\Gamma(2)$ und $\Gamma(3)$.

b) Zeigen Sie: $\Gamma(a+1) = a \cdot \Gamma(a)$.

c) Überprüfen Sie mit der Formel aus b) Ihre Ergebnisse aus a) und berechnen Sie $\Gamma(4)$ und $\Gamma(5)$.

Welchen Wert hat $\Gamma(n)$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$?

Aufgabe 5

Leiten Sie die Funktionen in der linken Spalte ab (Kettenregel!), um dann eine Idee zu bekommen, wie Sie bei den Funktionen in der mittleren und rechten Spalte eine Stammfunktion durch Raten, zurück Ableiten und ggf. Anpassen von Konstanten bestimmen können.

	Ableiten	Stammfunktion bilden	
a)	$F(x) = \mathrm{e}^{x^3}$	$f_1(x) = x^3 \cdot \mathrm{e}^{x^4}$	$f_2(x) = x \cdot \mathrm{e}^{x^2}$
b)	$G(x) = \sin^3 x$	$g_1(x) = \cos^2 x \cdot \sin x$	$g_2(x) = \sin^3 x \cdot \cos x$
c)	$H(x) = \sin(x^3)$	$h_1(x) = x \cdot \cos(x^2)$	$h_2(x) = x^2 \cdot \sin(x^3)$
d)	$F(x) = (x^2+1)^2$	$f_1(x) = x \cdot (x^2+2)^3$	$f_2(x) = x^2 \cdot \big(4x^3 - 1\big)^2$

Bestimmen Sie dann erneut Stammfunktionen zu den Funktionen in der mittleren und rechten Spalte, diesmal indem Sie eine geeignete Substitution durchführen.

Aufgabe 6

Bestimmen Sie Stammfunktionen durch Substitution oder durch „scharfes Hinschauen“ (d.h., raten Sie eine Stammfunktion und passen Sie sie durch Zurück-Ableiten an).

a) $\displaystyle\int x \cdot \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int x \cdot \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int \sin x \cdot \cos^4 x\,\mathrm{d}x$,

d) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$, e) $\displaystyle\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$, f) $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

Aufgabe 7

a) Wie muss man f wählen, damit man Integrale der Form

$$\int g(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{bzw.} \qquad \int \frac{g'(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x$$

mit der Substitutionsformel $\int f(g(x))\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = F(g(x))$ lösen kann?

Wie lauten (bei allgemeinem $g(x)$) die Stammfunktionen?

b) Nutzen Sie die Überlegungen aus a) zur Bestimmung von

$$\int \sin x \cdot \cos x\,\mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad \int \tan x\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 8

Formen Sie die folgenden Integrale mittels Substitution so um, dass man die entstehenden Integrale mit partieller Integration lösen kann.

a) $\displaystyle\int_0^4 \ln(\sqrt{x}+1)\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int_0^1 \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$.

Aufgabe 9

Bestimmen Sie mit Hilfe der Partialbruchzerlegungen (s. dazu Blatt 1-2, Aufgabe 6) Stammfunktionen zu

a) $f(x) = \dfrac{4x-3}{x^2+x-6}$, b) $g(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$,

c) $h(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+2x+1}$, d) $f(x) = \dfrac{-2x^2-3}{x^3+x}$.

Aufgabe 10

Bestimmen Sie eine Stammfunktion zu $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-4x+8}$.