FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

WS 2023/24
01.12.2023

Übungsblatt 9-2 zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

Aufgabe 1

a) Bestimmen Sie das 3-te Taylorpolynom in 0 von $f(x) = \mathrm{e}^x \sin x$.

b) Bestimmen Sie das 13-te Taylorpolynom in 1 zu $f(x) = x^3 - 2x$.

c) Bestimmen Sie das 3-te Taylorpolynom in 0 von $f(x) = \arcsin x$.

(Hinweis: $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$)

Aufgabe 2

Bei einem See der Länge l (gemessen als direkte Linie) erhält man für die Differenz Δl eines schwimmenden Seils und der direkten Linie (s. Blatt 3-1, Aufgabe 12):

$$\Delta l \;=\; 2R \cdot \arcsin \frac{l}{2R} - l.$$

Berechnen Sie eine Näherung für Δl, indem Sie das dritte Taylorpolynom zu $\arcsin x$ in $x = 0$ (s. Aufgabe 1, c)) zu Hilfe nehmen.

Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Näherung von Blatt 6-2, Aufgabe 5.

Aufgabe 3

a) Mit Zinseszins wächst ein Guthaben G bei jährlicher Vezinsung zu einem Zinssatz p nach n Jahren auf $G_n = (1+p)^n \cdot G$.

Was erhält man als lineare Taylor-Näherung dieser Formel aufgefasst als Funktion bzgl. p an der Entwicklungsstelle $p = 0$?

b) Bei kontinuierlicher Verzinsung zu einem Zinssatz p wächst ein Guthaben G innerhalb eines Jahres auf $G_1 = G \cdot \mathrm{e}^p$ (s. Blatt 5, Aufgabe 8, c)).

1) Was erhält man als lineare Taylor-Näherung dieser Formel aufgefasst als Funktion bzgl. p an der Entwicklungsstelle $p = 0$?

2) Sei konkret $p = 3\% = 0.03$ und $G = 1000$€.

Ab welcher Ordnung liefert die Taylor-Entwicklung auf den Cent genau den exakten Betrag? (Nutzen Sie einen Taschenrechner.)

Aufgabe 4

Die Funktion f sei definiert durch die Potenzreihe $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

Überzeugen Sie sich, dass das n-te Taylorpolynom in $x = 0$ zu f gleich der nach x^n abgeschnittenen Potenzreihe ist.

Aufgabe 5

a) Bestimmen Sie das n-te Taylorpolynom von $f(x) = \frac{1}{x}$ in 1 für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

b) Welche Reihe ergibt sich bei a) für $n \to \infty$?

Aufgabe 6

a) Überlegen Sie sich, dass die hinreichende Bedingung für eine Minimalstelle x_s nach Satz 5.3.7, 1., also $f'(x_s) = 0$ und $f''(x_s) > 0$, bedeutet, dass das zweite Taylorpolynom von f in x_s dort eine Minimalstelle hat.

b) Es soll ein Verfahren zur iterativen Bestimmung einer Extremstelle einer Funktion f entwickelt werden. Dazu wird zu einer Näherungsstelle x_n das zweite Taylorpolynom (eine Parabel) zu f bestimmt und dessen Extremstelle als nächste Näherung x_{n+1} bestimmt.

   1) Veranschaulichen Sie sich das Verfahren an der Funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ beginnend mit $x_0 = 0$.

   2) Stellen Sie eine Formel auf, wie sich x_{n+1} aus x_n berechnen lässt.

      Fällt Ihnen etwas auf?