Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

WS 2023/24
23.11.2023

Übungsblatt 8-1 zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Ableitung zu den folgenden Funktionen $f(x)$:

a) x^2+4x^3, b) $x\cdot\sin x$, c) $(x+1)\cdot\sqrt{x}$, d) $x\cdot\sin x\cdot\ln x$,

e) $\dfrac{1}{x^2+3x}$, f) $\dfrac{1}{\sin x}$, g) $\dfrac{x^2+2x}{3x+1}$, h) $\cot x$,

i) $\sin(x^2)$, j) $(\sin x)^2$, k) $\ln\sqrt{x}$, l) $\sin(\ln(x^2+1))$.

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Ableitung zu den folgenden Funktionen $f(x)$, bei denen neben der unabhängigen Variablen x auch noch Parameter a, b bzw. c vorkommen.

a) ax^2+bx^3, b) $\dfrac{1}{ax}$, c) e^{bx}, d) $\ln(cx)$,

e) $a+\sin x$, f) $a\cdot\sin x$, g) $\sin(a+x)$, h) $\sin(a\cdot x)$.

Aufgabe 3

a) Leiten Sie die Funktionen

$$f(x) \;=\; (5x+3)^2 \qquad \text{und} \qquad g(x) \;=\; (x+2)^3$$

einerseits mit Hilfe der Kettenregel ab und andererseits summandenweise nach Ausmultiplizieren.

b) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$ auf verschiedene Arten.

Aufgabe 4

Berechnen Sie die Ableitung zu den folgenden Funktionen; beachten Sie was die freie Variable ist; der Rest sind Konstanten.

a) $f(x)=\dfrac{x}{y}+y^2$ b) $f(y)=\dfrac{x}{y}+y^2$

c) $f(a)=ab+\sin(ab)$ d) $f(b)=ab+\sin(ab)$

Aufgabe 5

a) Zeigen Sie $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$, $(\sin x)'=\cos x$ und $(\cos x)'=-\sin x$, indem Sie die Potenzreihendarstellungen nutzen und diese Summandenweise ableiten.

b) Was ergibt sich, wenn Sie die Potenzreihendarstellung von $f(x)=\ln(1+x)$ Summandenweise ableiten?

Aufgabe 6

Nutzen Sie $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ und die Kettenregel, um die Formel $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$ herzuleiten.

Aufgabe 7

a) Berechnen Sie die Ableitung von $f(x) = \dfrac{x+2}{(x^2+3)^3}$.

Tipp: Nutzen Sie zur Ableitung des Nenners die Kettenregel, um anschließend kürzen zu können.

b) Zeigen Sie, dass man beim Ableiten einer Funktion der Form

$$f(x) = \frac{p(x)}{\big(q(x)\big)^n}$$

mit der Quotientenregel immer so kürzen kann, dass sich die Potenz im Nenner nur um Eins erhöht.

Aufgabe 8

Zeigen Sie: Ist a eine doppelte Nullstelle eines Polynoms p, so ist $p'(a) = 0$.

Aufgabe 9

Zeigen Sie:

a) Ist f eine gerade Funktion, so ist f' eine ungerade Funktion.

b) Ist f eine ungerade Funktion, so ist f' eine gerade Funktion.

Aufgabe 10

Leiten Sie eine Produktregel zur Ableitung von $f \cdot g \cdot h$ her.

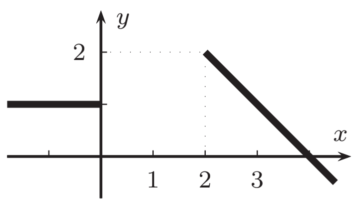
Aufgabe 11

a) Berechnen Sie f'' und f''' zu $f(x) = x^2 \cdot \sin x$.

b) Stellen Sie eine allgemeine Formel für $(g \cdot h)''$ und $(g \cdot h)'''$ auf.

Aufgabe 12 (vgl. Blatt 7-1, Aufgabe 5)

Finden Sie ein Polynom, das die beiden markierten Wegstücke glatt (d.h. ohne Knick) verbindet.



Aufgabe 13 (vgl. Blatt 7-1, Aufgabe 6)

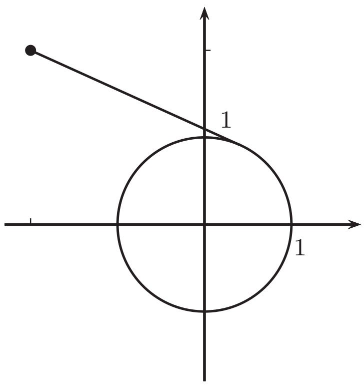
Für welche Kombination von Parametern c und a ist der Funktionsgraf zur Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} cx^2, & \text{für } x < 2, \\ \frac{1}{2}x + a, & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

glatt, d.h., auch bei $x = 2$ ohne Knick?

Aufgabe 14

Das nebenstehende Bild zeigt schematisch eine Papieraufwicklung. Die Walze hat den Radius 1, die Papierbahn kommt vom Punkt $(-2, 2)$.



An welchem Punkt berührt die Papierbahn die Walze?

Anleitung: Stellen Sie den oberen Halbkreis der Walze als Funktion f dar, bestimmen Sie die Tangentengleichung in $(x_0, f(x_0))$ (x_0 variabel) und suchen Sie das x_0, bei dem $(-2, 2)$ auf der Tangente liegt.

Aufgabe 15 (vgl. Blatt 3-2, Aufgabe 7)

In Hamburg schwankt die Wassertiefe der Elbe auf Grund von Ebbe und Flut zwischen 9m und 13m, wobei der Verlauf grob als Sinus-förmig mit einer Periode von 12 Stunden modelliert werden kann.

a) Zu welchen Zeiten ändert sich der Wasserstand am schnellsten?

b) Um wieviel ändert sich der Wasserstand zu diesen Zeiten innerhalb von einer Minute?

Nutzen Sie die Ableitung zur näherungsweisen Berechnung!

Aufgabe 16

Zu Sommerbeginn (21.06) ist in Aachen der Sonnenaufgang um 4:21 Uhr MEZ und zu Winterbeginn (21.12.) um 8:35 MEZ. Die Sonnenaufgangszeit dazwischen kann man grob als sinus-förmig modellieren.

Berechnen Sie damit näherungsweise unter Benutzung der Ableitung, um wieviel Minuten sich die Aufgangszeit vom 24. auf den 25.11. ändert.

Wie groß ist die Änderung zum Herbstanfang?

Aufgabe 17

Bei einem See der Länge l (gemessen als direkte Linie) erhält man für die Höhe h, die der See über der direkten Verbindung übersteht (s. Blatt 3-1, Aufgabe 12):

$$h \;=\; R - \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}.$$

Mit $f(x) = \sqrt{R^2 - x}$ ist $h = f(0) - f\big(\left(\frac{l}{2}\right)^2\big)$.

Nutzen Sie diese Darstellung, um mit Hilfe der Ableitung der Funktion f eine Näherung für h zu erhalten.

Vergleichen Sie diese Näherung mit der Näherung von Blatt 6-2, Aufgabe 5.