

Übungsblatt 7-1 zur Vorlesung Höhere Mathematik 1

Aufgabe 1

Gegeben sind die Funktionen

$$f : \mathbb{R}^{>0} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R}^{>0} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}.$$

Wie verhalten sich die Funktionen, wenn man sich mit dem Argument x der Null von rechts annähert? Existieren $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ bzw. $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$?

Skizzieren Sie die Funktionsgraphen.

Aufgabe 2

Gegeben sind die Funktionen

$$H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, H(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq 0 \\ 1, & \text{falls } x > 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2.$$

Bestimmen Sie $H(\lim_{x \rightarrow 0} f(x))$ und $\lim_{x \rightarrow 0} H(f(x))$.

Aufgabe 3

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte unter zu Hilfenahme der Potenzreihenentwicklungen.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}, & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x^2}, & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3}, \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\cosh x - 1}, & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x}. & \end{array}$$

Aufgabe 4

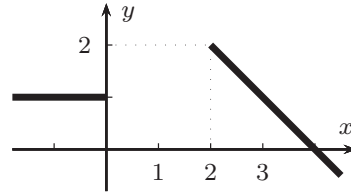
Geben Sie die folgenden Grenzwerte (in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$) an:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x}{x^3}, & \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{4^x}, & \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} 3^{-x} \cdot x^5, \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} 4^x \cdot x^3, & \text{e) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot x^2, & \text{f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x}{x}, \\ \text{g) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - 1}{x + 2}, & \text{h) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 1}{2x^2 + x + 1}, & \text{i) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 4}{4x - 1}, \\ \text{j) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x - 1)^2}{x^2 + 1}, & \text{k) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{1 - x^2}, & \text{l) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{1 - x^2}, \\ \text{m) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\log_2 x}, & \text{n) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2}{x}, & \text{o) } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \cdot \log x, \\ \text{p) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln x}, & \text{q) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^{\frac{1}{x}}}{x}, & \text{r) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2^{\frac{1}{x}}}{x}. \end{array}$$

Aufgabe 5

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x < 0 \\ 4 - x, & \text{für } x > 2 \end{cases}$$



soll für $x \in [0, 2]$ so definiert werden, dass f stetig ist.

Wie kann man das möglichst einfach machen?

Aufgabe 6

Für welche Kombination von Parametern c und a ist die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} cx^2, & \text{für } x < 2, \\ \frac{1}{2}x + a, & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

stetig? Gibt es auch eine Kombination mit $c = a$?

Aufgabe 7

Geben Sie die Nullstellen von $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 3$ mit Hilfe des Bisektionsverfahrens mit einer Genauigkeit kleiner 0.01 an.

(Statt das Verfahren von Hand durchzuführen, bietet es sich an, ein kleines Programm zu schreiben.)

Aufgabe 8 (Fortsetzung von Blatt 2-1, Aufgabe 10)

Bestimmen Sie mit Hilfe des Bisektionsverfahrens ein a , das

$$25 = 2a \cdot \sinh \frac{10}{a}$$

erfüllt mit einer Genauigkeit kleiner 0.001.

Aufgabe 9 (beispielhafte Klausuraufgabe, 10 Minuten)

Betrachtet wird das Bisektionsverfahren zur Bestimmung einer Nullstelle von

$$f(x) = x^3 + 2x - 4.$$

- Führen Sie zwei Schritte des Bisektionsverfahrens ausgehend von 0 und 2 durch, und geben Sie ein Intervall der Länge 0.5 an, in dem eine Nullstelle liegt.
- Wieviel Schritte muss man mit dem Bisektionsverfahren machen, um ausgehend von 0 und 2 ein Intervall der Länge 10^{-6} anzugeben, in dem eine Nullstelle liegt?

Geben Sie die Anzahl formelmäßig und näherungsweise (mit der groben Abschätzung $2^3 \approx 10$) an.