FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

WS 2023/24
02.11.2023

Übungsblatt 5 zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

Die Aufgaben entstammen meinem *Arbeitsbuch höhere Mathematik*, Springer-Verlag

Aufgabe 1

Die Folgen $\left(\frac{2n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left(1+\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren.

Stellen Sie jeweils eine Vermutung bzgl. des Grenzwertes a auf und geben Sie dann jeweils ein N an, so dass für $n \geq N$ für die Folgenglieder a_n gilt:

$$|a_n - a| < \frac{1}{100} \qquad \text{bzw.} \qquad |a_n - a| < 10^{-8}.$$

Aufgabe 2

Sind die angegebenen Folgen konvergent?

a) $a_n = \pi$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) $b_n = 0$ für alle n, die nicht durch 10 teilbar sind; ist n Vielfaches von 10, so ist $b_n = 1$.

c) $c_n = 0$ für alle n außer für Zehnerpotenzen; für Zehnerpotenzen n, also $n = 10^k$, ist $c_n = 1$.

d) $d_n = 0$ für alle n außer für Zehnerpotenzen; es ist $d_1 = 1$, und ist $n = 10^k$, $k \geq 1$, so ist $d_n = \frac{1}{k}$;

Aufgabe 3

Geben Sie den Grenzwert der folgenden Folgen in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ an.

a) $\left(\frac{2n-1}{4n+3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, b) $\left(\frac{3n}{n^2-3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, c) $\left(\frac{2n^2+3}{2-n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

d) $\left(\frac{n^2}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, e) $\left(\frac{(n+2)^2}{2n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, f) $\left(\frac{n^3-3n^2+1}{1-n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

g) $\left(\frac{4n+2}{(3n-1)^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, h) $\left(\frac{3n^2}{(2n+1)^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, i) $\left(\frac{n(4n-1)^2}{(2n+1)^3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die Grenzwerte von

a) $\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, b) $\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

(Tipp: Formen Sie die Ausdrücke durch geschickte Erweiterung mittels der dritten binomischen Formel so um, dass Sie das Konvergenzverhalten klar erkennen können.)

Aufgabe 5

a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfülle $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$.

Welchen Grenzwert hat die Folge, falls sie konvergiert?

b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{c}{2a_n}$$

mit einem Parameter $c \in \mathbb{R}^{>0}$ konvergiert. (Das brauchen Sie nicht zu zeigen). Welchen Grenzwert hat die Folge? (Vgl. Blatt 4-2, Aufgabe 9, e).)

Aufgabe 6

Geben Sie jeweils reelle Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, die

a) $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ und $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ erfüllen und für die gilt

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 3$, 2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$.

b) $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ und $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ erfüllen und für die gilt

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$, 2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 3$,

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \infty$, 4) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = -\infty$.

Aufgabe 7

Geben Sie die Grenzwerte (in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$) der folgenden Folgen an.

a) $\left(\frac{n^4}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, b) $\left(\frac{3^n}{n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, c) $\left(n^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

d) $\left(\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, e) $\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, f) $\left(\frac{n^2}{\sqrt{2n^4+n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

g) $\left(\sqrt[3]{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, h) $\left(\frac{n^2 + n\cdot 2^n}{3^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, i) $\left(\frac{1-2^n}{n^3+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 8

a) Sie wollen 1000 Euro für ein Jahr anlegen. Bank A bietet Ihnen für das Jahr 4% Zinsen. Bank B bietet nur 3,98%, schreibt Ihnen aber nach einem halben Jahr schon die bis dahin fälligen Zinsen gut und verzinst sie dann mit. Bank C gibt nur 3,95%, wirbt aber mit monatlicher Gutschrift der aufgelaufenen Zinsen. Welches Angebot ist am günstigsten?

b) Wie lautet die Formel für Ihr Guthaben nach einem Jahr bei einem Zinssatz von p Prozent, wenn Ihnen die aufgelaufenen Zinsen n mal im Jahr gutgeschrieben werden?

c) Was ergibt sich bei b) für $n \to \infty$, also bei kontinuierlicher Zinsgutschrift?