Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

WS 2023/24
19.01.2024

Übungsblatt 14-2 zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

Aufgabe 1

Sei $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ die Diagonalmatrix mit den Diagonaleinträgen $-1, 2, 1$ (von links oben nach rechts unten). Berechnen Sie $D \cdot A$ und $A \cdot D$ zu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

a) Ist das Produkt zweier symmetrischer Matrizen wieder symmetrisch?

b) Ist das Quadrat einer symmetrischen Matrix wieder symmetrisch?

c) Ist das Produkt zweier Diagonalmatrizen wieder eine Diagonalmatrix?

Aufgabe 3

Zu einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt die Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^T A x$ *quadratische Form*.

a) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Geben Sie die quadratische Form $x^T A x$ zu $x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)$ in Koordinatenschreibweise an.

b) Geben Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ an mit

$$x^T A x \;=\; {x_1}^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + {x_3}^2 \qquad \left(x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3\right).$$

Finden Sie auch eine symmetrische Matrix A, die dies erfüllt?

Aufgabe 4

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie A^{-1} und B^{-1}.

b) Berechnen Sie $(A \cdot B)^{-1}$ einerseits, indem Sie $A \cdot B$ berechnen und dazu die Inverse bestimmen, und andererseits, indem Sie A^{-1} und B^{-1} zu Hilfe nehmen.

Aufgabe 5

Für welche Werte von c ist die Matrix

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & c \end{pmatrix}$$

invertierbar? (Vgl. Blatt 11-2, Aufgabe 5)

Wie lautet dann die Inverse A^{-1}?

Aufgabe 6

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie A^{-1} und B^{-1}.

b) Geben Sie Lösungen x an zu

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Ax = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Bx = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad Bx = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *orthogonal* genau dann, wenn $A^{-1} = A^T$ ist.

a) Welche der folgenden Matrizen sind orthogonal?

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \; (\alpha \in \mathbb{R}), \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Sei $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1) Prüfen Sie nach, dass die drei Vektoren jeweils orthogonal zueinander sind.

2) Bestimmen Sie λ_i so, dass für $\tilde{a_i} = \lambda_i \cdot a_i$ gilt: $||\tilde{a_i}|| = 1$.

3) Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ die Matrix bestehend aus $\tilde{a_1}$, $\tilde{a_2}$ und $\tilde{a_3}$ als Spalten.

   Überlegen Sie sich, dass A orthogonal ist.

   (Tipp: Blatt 14-1, Aufgabe 9, b))

4) Prüfen Sie nach, dass die Zeilen von A als Vektoren aufgefasst normiert und orthogonal zueinander sind.