Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

WS 2023/24
18.01.2024

Übungsblatt 14-1 zur Vorlesung Höhere Mathematik 1

Aufgabe 1

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche Matrixprodukte kann man mit diesen Matrizen bilden? Welche Dimensionen haben die Produkte? Berechnen Sie die Produkte.

Aufgabe 2

a) Rechnen Sie nach, dass zu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ die Produkte $A \cdot B$ und $B \cdot A$ verschieden sind.

b) Rechnen Sie nach, dass zu $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = A^2$ die Produkte $A \cdot B$ und $B \cdot A$ gleich sind.

   Ist das Zufall?

Aufgabe 3

Wählen Sie sich drei Matrizen A, B und C mit jeweils unterschiedlichen Zeilen- und Spaltenanzahlen, aber so, dass man $A \cdot B$ und $B \cdot C$ bilden kann.

Überlegen Sie, dass man dann auch $(A \cdot B) \cdot C$ und $A \cdot (B \cdot C)$ bilden kann.

Welche Dimensionen ergeben sich? Berechnen Sie die Produkte.

Aufgabe 4

Gegeben sind die beiden linearen Abbildungen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot x \qquad \text{und} \qquad g(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot x.$$

a) Wie wird das Rechteck mit den Eckpunkten

$$A = (2|0), \quad B = (2|1), \quad C = (0|1) \quad \text{und} \quad D = (0|0)$$

   einerseits mittels $f \circ g$ und andererseits mittels $g \circ f$ abgebildet?

b) Man kann $f \circ g$ bzw. $g \circ f$ als lineare Abbildung auffassen.

   Wie lauten die entsprechenden Abbildungsmatrizen?

Aufgabe 5

In einer chemischen Fabrik werden vier Grundsubstanzen G_1, G_2, G_3 und G_4 benutzt. Zunächst werden diese zu drei Zwischenprodukten Z_1, Z_2 und Z_3 verarbeitet. Um jeweils eine Mengeneinheit zu erhalten, braucht man

	von G_1	von G_2	von G_3	von G_4
für Z_1	2 Einheiten	1 Einheit	3 Einheiten	
für Z_2	1 Einheit	2 Einheiten	1 Einheit	1 Einheit
für Z_3			1 Einheit	3 Einheiten

In einem weiteren Produktionsschritt werden daraus die beiden Endprodukte E_1 und E_2 gefertigt; für jeweils eine Mengeneinheit braucht man

	von Z_1	von Z_2	von Z_3
für E_1	1 Einheit		2 Einheiten
für E_2		2 Einheiten	1 Einheit

Wie sieht die Zusammensetzung der Endprodukte in Bezug auf die Grundsubstanzen aus?

Formulieren Sie den Zusammenhang als Matrix-Matrix-Multiplikation.

Aufgabe 6 (Fortsetzung von Blatt 13-1, Aufgabe 3)

Die Änderung der Masseverteilung von $2NO_2$ und N_2O_4 innerhalb einer Minute kann bei einer bestimmten Termperatur beschrieben werden durch

$$m_1 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix} \cdot m_0,$$

wobei $m_0 = \binom{m_{0,1}}{m_{0,2}}$ die Masseverteilung vorher und $m_1 = \binom{m_{1,1}}{m_{1,2}}$ die nachher beschreiben.

a) Wie kann man die entstehende Masseverteilung m_2 bzw. m_3 nach zwei bzw. drei Minuten als direktes Matrix-Vektor-Produkt aus m_0 berechnen?

b) Wie sieht formelmäßig eine Matrix aus, mit der man die Masseverteilung nach n Minuten ausrechnen kann?

   Berechnen Sie das konkrete Ergebnis mit Hilfe eines Computerprogramms. Was ergibt sich für große n? Wie hängt die Masseverteilung für große n von der anfänglichen Masseverteilung ab?

Aufgabe 7

a) Sei $A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 \\ 0.9 & 0.6 \end{pmatrix}$.

Rechnen Sie nach, dass bei A, B und $A \cdot B$ jeweils die Summe der Elemente in einer Spalte gleich 1 ist.

b) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zwei Matrizen, wobei jeweils die Summe der Elemente in einer Spalte gleich Eins ist. Zeigen Sie, dass diese Eigenschaft dann auch für $A \cdot B$ gilt.

Betrachten Sie zunächst den Fall $n = 2$ und schreiben Sie die Matrizen mit allgemeinen Komponenten $a_{i,j}$ bzw. $b_{i,j}$.

Aufgabe 8

a) Berechnen Sie $M_1 = A \cdot A^T$ und $M_2 = A^T \cdot A$ zu $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Überlegen Sie sich, dass man zu $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ stets die Produkte $A \cdot A^T$ und $A^T \cdot A$ bilden kann. Welche Dimensionen ergeben sich?

c) Die Produkte M_1 und M_2 aus a) sind symmetrisch bzgl. der Hauptdiagonalen, also ${M_1}^T = M_1$ und ${M_2}^T = M_2$. Ist das Zufall?

Aufgabe 9

a) Berechnen Sie die Matrix $A^T \cdot A$ zu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Überlegen Sie sich anhand des Beispiels aus a) und allgemein:

Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ besitze die Vektoren $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^m$ als Spalten, also $A = (a_1, \ldots, a_n)$. Dann gilt:

1) Die Matrix A^T besitzt die Zeilen $a_1^T, \ldots, a_n^T$, also $A^T = \begin{pmatrix} {a_1}^T \\ \ldots \\ {a_n}^T \end{pmatrix}$.

2) Es gilt:

$$\begin{aligned} & a_1, \ldots, a_n \text{ sind normiert und orthogonal zueinander} \\ \Leftrightarrow \quad & A^T \cdot A = I_n \text{ mit der } (n \times n)\text{-Einheitsmatrix } I_n. \end{aligned}$$