Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik
Prof. Georg Hoever

WS 2023/24
22.12.2023

Übungsblatt 12-2 zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

Aufgabe 1

a) Geben Sie eine Darstellung der Geraden g im $\mathbb{R}^3$ an, die durch

$$P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

verläuft.

Liegt $Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ auf g?

b) Geben Sie eine Darstellung der Geraden g im $\mathbb{R}^4$ an, die durch

$$P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

verläuft?

Aufgabe 2

Welche Punkte auf der Geraden $g = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ haben

a) von $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ den Abstand 3,

b) von $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ den Abstand 5?

Aufgabe 3

Betrachtet wird das Dreieck mit den Eckpunkten

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Gesucht ist der Lotfußpunkt L des Lots von C auf die Seite $\overline{AB}$ bzw. auf die Gerade g, auf der diese Seite liegt.

Berechnen Sie L auf drei verschiedene Arten:

a) Bestimmen Sie L als Schnittpunkt von g und der Geraden h, die durch C führt und senkrecht zu g ist.

b) Bestimmen Sie L als den Punkt auf g, so dass der Verbindungsvektor von L zu C senkrecht auf dem Richtungsvektor von g steht.

c) Bestimmen Sie L als nächstliegenden Punkt auf g an C, indem Sie den Abstand $d(\lambda)$ von C zu einem allgemeinen Punkt der Geraden g in Abhängigkeit von dem Parameter λ berechnen und die Minimalstelle der Funktion $d(\lambda)$ bestimmen.

Berechnen Sie schließlich die Höhe und damit die Fläche des Dreiecks.

Aufgabe 4

In Aufgabe 16 von Blatt 12-1 und Aufgabe 3 werden insgesamt fünf verschiedene Möglichkeiten zur Berechnung der Fläche eines ebenen Dreiecks betrachtet.

Stellen Sie diese Möglichkeiten zusammen, und überlegen Sie, welche der Möglichkeiten auch in drei- und höherdimensionalen Räumen funktionieren.

Aufgabe 5

a) Stellen Sie die Ebene durch die Punkte $P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ in Parameter- und in Normalendarstellung dar.

Testen Sie, ob der Punkt $Q = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ in der Ebene liegt.

b) Stellen Sie die Ebene, die durch $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ führt und senkrecht zu $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist, in Parameter- und in Normalendarstellung dar.

Aufgabe 6

Stellen

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

und

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

die gleiche Ebene dar?

Überlegen Sie sich verschiedene Möglichkeiten, dies zu überprüfen.

Aufgabe 7

a) Geben Sie eine Normalendarstellung der Geraden

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

sowie eine Darstellung $x_2 = f(x_1)$ für die Punkte $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ der Geraden an.

b) Betrachtet wird die Hyperebene E im $\mathbb{R}^4$, die durch

$$E = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 7 \right\}$$

beschrieben wird.

b1) Geben Sie verschiedene Punkte P an, die in E liegen.

b2) Geben Sie verschiedene Richtungsvektoren $\vec{v}$ zu E an.

Aufgabe 8

Berechnen Sie die Schnittmenge von

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

mit der Geraden

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \; \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

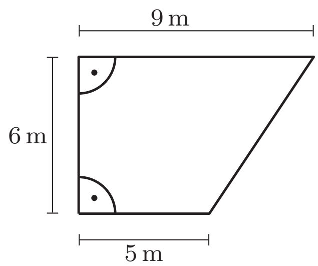
indem Sie

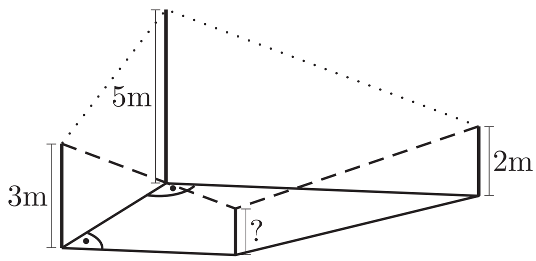
a) die Parameterdarstellung von E benutzen.

b) E in Normalendarstellung darstellen und diese nutzen.

Aufgabe 9 (beispielhafte Klausuraufgabe, $6 + 10 + 4 = 20$ Minuten)

In Krummhausen wird ein Schuppen gebaut mit dem links abgebildeten Grundriss. An drei Ecken stehen schon (unterschiedlich hohe) Säulen (s. rechts).





a) Wie groß ist der Winkel zwischen den (gepunktet dargestellten) Dachkanten an der 5m hohen Säule?

b) Zeichnen Sie in die Abbildung rechts ein Koordinatensystem ein und geben Sie entsprechend Ihres Koordinatensystems eine Normalendarstellung für die durch die Dachfläche gebildete Ebene E an.

c) Wie hoch muss die Säule an der vierten Ecke sein, damit ein ebenes Dach passend aufliegt?

******* *Frohe Weihnachten und einen guten Übergang ins neue Jahr!* *******

Aufgabe 10

Betrachtet wird die (Ursprungs-)Ebene

$$E = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bestimmen Sie den nächstgelegenen Punkt Q auf E an den Punkt $\vec{p} = \left(\begin{smallmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ auf folgende Weisen:

a) als Schnittpunkt der Ebene mit der Geraden, die durch P führt und einen zu E orthogonalen Richtungsvektor besitzt,

b) als den Punkt auf E, so dass der Differenzvektor $\vec{p} - \vec{q}$ senkrecht auf den die Ebene aufspannenden Richtungsvektoren steht.

Aufgabe 11

Betrachtet wird der Vektorraum V der auf dem Intervall $[0; 2\pi]$ stetigen Funktionen mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}x$$

und die Vektoren $f_1,\ f_2,\ f_3 \in V$ mit

$$f_1(x) = 1, \qquad f_2(x) = \cos x \qquad \text{und} \qquad f_3(x) = \sin x$$

sowie $g \in V$ mit $g(x) = x$.

Welche Funktion auf der Ursprungs-Ebene, die durch f_1, f_2 und f_3 aufgespannt wird, liegt am nächsten an g?

Anleitung: Gesucht ist die Linearkombination $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3$, so dass der Differenzvektor $g - f$ senkrecht auf den aufspannenden Vektoren f_i steht.

Tipp: Vergleiche Aufgabe 10, b).

******* *Frohe Weihnachten und einen guten Übergang ins neue Jahr!* *******