

Übungsblatt 11-2 zur Vorlesung Höhere Mathematik 1

Aufgabe 1

- a) Zeichnen Sie die Punkte $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $S = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und die zugehörigen Ortsvektoren \vec{p} , \vec{q} und \vec{s} .
- b) Was ergibt $\vec{p} + \vec{q}$, was $\vec{p} - \vec{s}$?
- c) Welcher Vektor führt von P zu S , welcher von Q zu P ?
- d) Bestimmen und zeichnen Sie $2 \cdot \vec{p}$, $-\frac{1}{2} \cdot \vec{p}$, $2 \cdot (\vec{p} + \vec{q})$.
- e) Wie erhält man den Punkt T , der genau zwischen P und Q liegt?

Aufgabe 2

Berechnen Sie

$$\vec{a} + \vec{b}, \quad \vec{a} - \vec{b}, \quad -\vec{a}, \quad 3\vec{b}, \quad 2 \cdot (\vec{a} + \vec{b}), \quad 2\vec{a} + 2\vec{b}$$

für die folgenden Fälle:

- a) im Vektorraum \mathbb{R}^2 mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Zeichnen Sie die Vektoren.
- b) im Vektorraum \mathbb{R}^3 mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Versuchen Sie, sich die Vektoren vorzustellen.
- c) im Vektorraum \mathbb{R}^4 mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- d) im Vektorraum aller Polynome mit

$$\vec{a} \text{ als dem Polynom } a(x) = x^3 + x + 1 \quad \text{und} \quad \vec{b} \text{ als } b(x) = x^2 - 2x.$$

Aufgabe 3

a) Stellen Sie die Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ dar.

b) Stellen Sie $p(x) = 2x^2 + 2x + 1$ dar als Linearkombination von

$$v_1(x) = x + 1, \quad v_2(x) = x^2 \quad \text{und} \quad v_3(x) = x^2 + 1.$$

Aufgabe 4

Ein Roboter kann auf einer Schiene entlang der x -Achse fahren und hat einen diagonalen Greifarm (Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$), den er aus- und einfahren kann.

In welcher Position muss der Roboter stehen, um einen Gegenstand bei $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ zu fassen?

Formulieren Sie das Problem mittels Linearkombination von Vektoren.

Aufgabe 5

Für welche Werte von c sind drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ c \end{pmatrix}$$

linear unabhängig?

Aufgabe 6

Machen Sie sich anschaulich klar, welche der folgenden Mengen ein Erzeugendensystem bzw. sogar eine Basis des \mathbb{R}^2 bilden.

$$\text{a) } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{b) } \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{c) } \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{d) } \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e) } \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe 7

Sei P_n der Vektorraum aller Polynome vom Grad $\leq n$.

- a) Welche der folgenden Mengen bilden ein Erzeugendensystem, welche sogar eine Basis von P_2 ?
- 1) $\{1, x, x^2\}$, 2) $\{1+x, 1+x^2\}$, 3) $\{1, 1+x, 1+x^2\}$
4) $\{1+x, x^2, 1+x+x^2\}$, 5) $\{1, 1+x, 1+x^2, x^2\}$
- b) Welche Dimension hat P_2 ?
- c) Welche Dimension hat P_n ?

Aufgabe 8

Sei V die Menge aller in x -Richtung verschobenen und in y -Richtung gestreckten oder gestauchten Sinus- und Cosinus-Funktionen.

- a) Überlegen Sie sich, dass V ein Vektorraum ist.
- b) Geben Sie eine Basis von V an.

(Tipp: Vgl. Blatt 3-2, Aufgabe 8, und Blatt 4-2, Aufgabe 6.)

Aufgabe 9

- a) Rechnen Sie nach, dass $f(x) = x$ und $f(x) = \frac{1}{x}$ Lösungen der Differentialgleichung

$$x^2 \cdot f''(x) + x \cdot f'(x) - f(x) = 0.$$

sind, und dass sogar jedes f mit $f(x) = c_1 \cdot x + c_2 \cdot \frac{1}{x}$ ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ beliebig) eine Lösung der Differentialgleichung ist.

- b) Rechnen Sie nach, dass, falls die Funktionen f_1 und f_2 Lösungen der Differentialgleichung

$$a_2(x) \cdot f''(x) + a_1(x) \cdot f'(x) + a_0(x) \cdot f(x) = 0$$

(mit fest vorgegebenen Funktionen a_0 , a_1 und a_2) sind, auch immer jede Linearkombination $f(x) = c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x)$ ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ beliebig) eine Lösung ist.