Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

WS 2023/24
07.12.2023

Übungsblatt 10-1 zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

Aufgabe 1

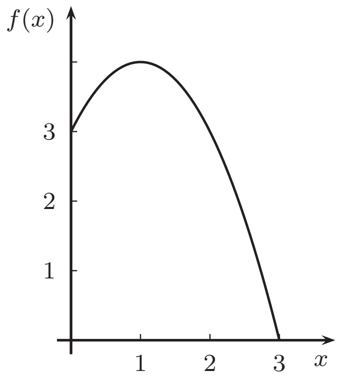
Sei $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ (s. Skizze).

Berechnen Sie (mit einem Taschenrechner) Näherungen zu $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ durch eine Riemannsche Zwischensumme zu den folgenden Zerlegungen

a) $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,$

b) $x_0 = 0,\ x_1 = 0.5,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1.5,$
$x_4 = 2,\ x_5 = 2.5,\ x_6 = 3,$

c) $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2.5,\ x_3 = 3,$



und Zwischenstellen $\widehat{x_k}$ am linken Intervallrand.

Was ergibt sich bei der Zerlegung a) bei Zwischenstellen $\widehat{x_k}$ in der Intervallmitte bzw. als Ober- und Untersumme?

Skizzieren Sie die Situationen.

Aufgabe 2

Stellen Sie die Riemannsche Zwischensumme zu

$$\int\limits_a^b \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \qquad (0 < a < b)$$

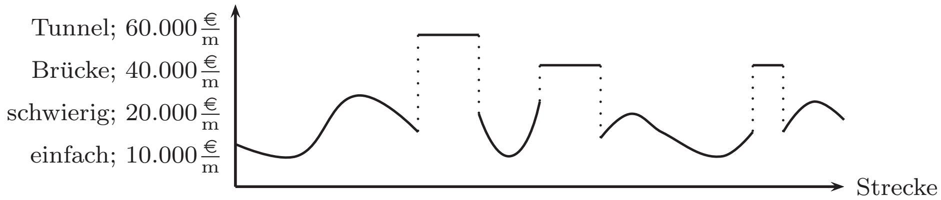
auf, wobei zu einer Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ als Zwischenstellen die geometrischen Mittel $\widehat{x_k} := \sqrt{x_{k-1} \cdot x_k} \in [x_{k-1}, x_k]$ von x_{k-1} und x_k genutzt werden.

Vereinfachen Sie die Summe.

Aufgabe 3

Überlegen Sie sich, dass die folgenden Sachverhalte zu Integralberechnungen führen:

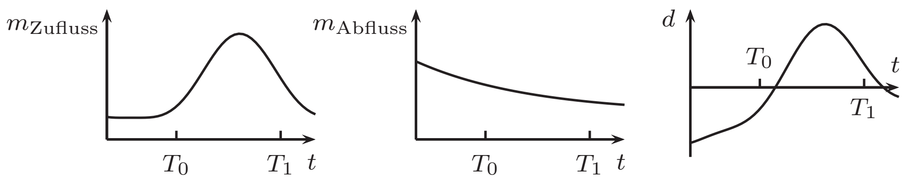
a) Bei dem Bau einer Eisenbahnlinie gibt es unterschiedlich schwierige Gelände (z.B. Brücken, Tunnel), die sich direkt in unterschiedlichen Preisen pro Meter Strecke auswirken. Der Streckenplaner hat diese Schwierigkeiten bzw. Kosten in einer Skizze erfasst. Wie teuer wird die gesamte Strecke?



b) Die Zu- und Abflüsse eines Wasservorratsbehälters werden von zwei Messgeräten erfasst: $m_{\text{Zufluss}}(t)$ bzw. $m_{\text{Abfluss}}(t)$ geben jeweils die entsprechenden Mengen Wasser in $\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ an. Die Grafiken zeigen den Verlauf von m_{Zufluss}, m_{Abfluss}, sowie von der Differenz $d(t) = m_{\text{Zufluss}}(t) - m_{\text{Abfluss}}(t)$.

Wieviel Wasser ist zwischen T_0 und T_1 zugeflossen, wieviel abgeflossen?

Wenn zur Zeit T_0 eine Wassermenge M_0 im Behälter war, wieviel ist es dann zur Zeit T_1?



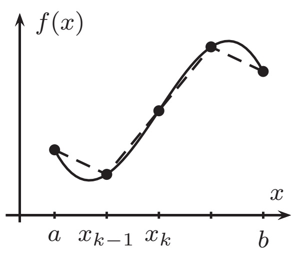
Aufgabe 4

Ziel ist eine Formel zur Berechnung der Länge L einer Kurve, die durch eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gegeben ist.

a) Eine erste Näherung erhält man, indem das Intervall $[a, b]$ in n Teilintervalle $[x_{k-1}, x_k]$ mit

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

zerlegt wird, und der Funktionsgraf durch Geradenstücke zwischen den Punkten $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ und $(x_k, f(x_k))$ ersetzt wird (s. Skizze).



Welche Näherung erhält man auf diese Weise für L?

b) Wie lautet die Näherung, wenn Sie in der Formel von a) die Differenz benachbarter Funktionswerte näherungsweise mit Hilfe der Ableitung ausdrücken?

c) Welche Formel ergibt sich für L, wenn Sie die Zerlegung immer feiner machen?

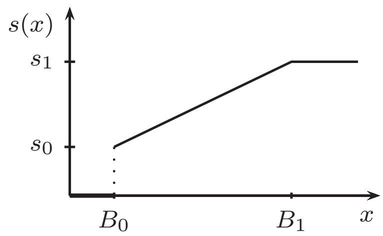
Aufgabe 5

Schreiben Sie ein Programm zur numerischen Berechnung von $\int\limits_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x$, indem Sie beispielsweise eine äquidistante Zerlegung mit $n+1$ Zwischenpunkten x_k wählen und die Funktion an den Zwischenstellen $\frac{x_{k-1}+x_k}{2}$ auswerten. Berechnen Sie die Integralnäherungen für verschiedene Werte von n.

(Tipp: Zur Nutzung der Sinus-Funktion in C++ sollten Sie `math.h` includieren)

Aufgabe 6

Bei der Beschreibung von linear-progressiven Steuermodellen werden oft Eckdaten wie folgende angegeben:



Beträge bis zu B_0 werden nicht versteuert (Grundfreibetrag). Der Steuersatz s steigt dann von s_0 (Eingangssteuersatz) linear auf s_1 (Spitzensteuersatz) bei B_1 zu versteuerndem Einkommen an.

Dabei ist der Steuersatz *nicht* so zu verstehen, dass das Einkommen E mit dem Steuersatz $s(E)$ versteuert wird, sondern ungefähr so, dass der x-te Euro des Einkommens mit dem Steuersatz $s(x)$ versteuert wird, bzw. genauer auf Cent-Unterteilung mit entsprechendem Steuersatz bzw. exakt als Grenzwert bei immer feineren Zerlegungen.

Sehen Sie einen Zusammenhang zur Integral-Thematik?

Aufgabe 7

Skizzieren Sie zu den folgenden Integralen die Integranden, und bestimmen Sie mittels Symmetriebetrachtungen und elementar-geometrischen Berechnungen den Wert der Integrale.

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos x\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2 x\,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$, d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} (1+\cos x)\,\mathrm{d}x$,

e) $\displaystyle\int_{-2}^{2} |x|\,\mathrm{d}x$, f) $\displaystyle\int_{-1}^{2} x\,\mathrm{d}x$, g) $\displaystyle\int_{2}^{0} x\,\mathrm{d}x$, h) $\displaystyle\int_{-1.5}^{1.5} (x^3-x)\,\mathrm{d}x$.