Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

WS 2022/23
11.11.2022

Übungsblatt 7-2 zur Vorlesung Höhere Mathematik 1

Aufgabe 1

Sei $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

a) Berechnen Sie (mit einem Taschenrechner) die Steigung der Geraden durch die Punkte $P_1 = (1, f(1)) = (1,1)$ und $P_x = (x, f(x))$ zu

$$1)\ x = 2, \quad 2)\ x = 1.5, \quad 3)\ x = 1.1, \quad 4)\ x = 1.0001, \quad 5)\ x = 0.9999.$$

b) Welche Steigung ergibt sich formelmäßig bei P_1 und P_x zu allgemeinem x?

c) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion f an der Stelle 1, indem Sie bei b) den Grenzwert $x \to 1$ betrachten.

d) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion f an einer beliebigen Stelle x_0 analog zu b) und c) als Grenzwert des Differenzenquotienten.

Aufgabe 2

Ziel der Aufgabe ist die Bestimmung der Ableitung von $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \mathrm{e}^x$.

a) Berechnen Sie $f'(0)$ als Grenzwert des Differenzenquotienten unter Verwendung der Potenzreihendarstellung von e^x.

b) Bestimmen Sie für eine beliebige Stelle x_0 die Ableitung $f'(x_0)$ als Grenzwert des Differenzenquotienten $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

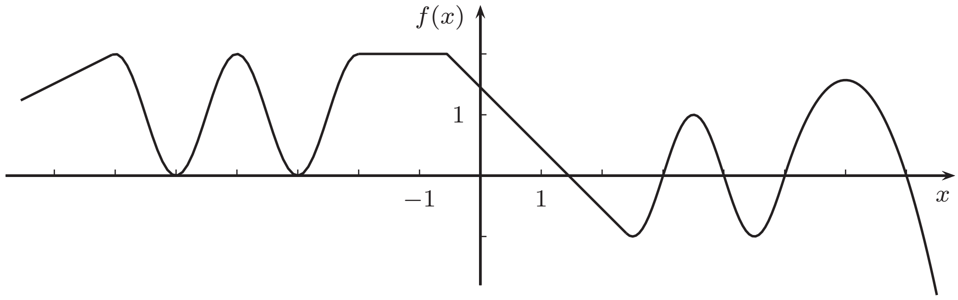
(Tipp: Nach einer Umformung können Sie die Grenzwertbeziehung aus a) benutzen.)

Aufgabe 3

Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = \sin x$ als Grenzwert des Differenzenquotienten in der Gestalt $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ unter Ausnutzung der Additionstheoreme und der Potenzreihenentwicklungen.

Aufgabe 4

Skizzieren Sie den ungefähren Verlauf der Ableitung zu der abgebildeten Funktion.



Aufgabe 5

Geben Sie die Geradengleichung der Tangenten an die Funktionsgrafen

a) von $f(x) = x^2$ in $x_0 = \frac{1}{2}$

b) von $f(x) = \frac{1}{x}$ in $x_0 = 2$

c) von $f(x) = \mathrm{e}^x$ in $x_0 = 0$

an und fertigen Sie entsprechende Zeichnungen an.

(Hinweis: Nutzen Sie die Ableitungen $\left(x^2\right)' = 2x$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ und $(\,\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.)

Aufgabe 6

Berechnen Sie näherungsweise den Ableitungswert zu $f(x) = x^3$ an der Stelle $x_0 = \sqrt{2}$, indem Sie den Differenzenquotienten $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ für kleine Werte von h (zwischen 0.1 und 10^{-16}) mit einem Taschenrechner auswerten.

Für welche Werte von h ergeben sich die genauesten Werte?

Aufgabe 7

Berechnen Sie die folgenden Differenzen näherungsweise unter Benutzung der Ableitung, d.h. mittels der Formel $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$:

a) $3.1^2 - 3^2$,

b) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2.1}$.

Aufgabe 8

Ist $s(t)$ die Strecke, die ein Körper in der Zeit t nach dem Loslassen in freiem Fall zurücklegt, so gilt für die Geschwindigkeit

$$v(t) \;=\; s'(t) \;=\; g \cdot t \qquad \text{mit } g \approx 10\,\mathrm{m/s^2}.$$

Welche Geschwindigkeit hat der Körper, nachdem er zwei Sekunden gefallen ist, und welche Strecke legt er dann ungefähr innerhalb einer Zehntel Sekunde zurück? Sehen Sie einen Bezug zum Thema Ableitung?

Aufgabe 9 (beispielhafte Klausuraufgabe, 10 Minuten)

Für welche Punkte auf der Parabel $f(x) = x^2$ führt die Tangente an f durch den Punkt $(1, -3)$?