Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

WS 2022/23
21.10.2022

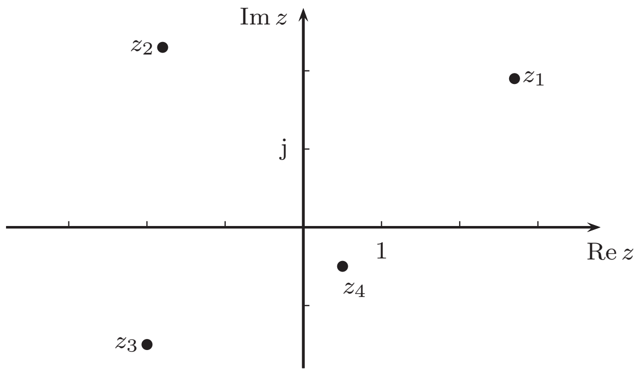
Übungsblatt 4-2 zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

Aufgabe 1

a) Markieren Sie die folgenden Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene:

$$z_1 = 2\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{j}}, \qquad z_2 = 3\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{j}}, \qquad z_3 = 0.5\,\mathrm{e}^{\pi\mathrm{j}}, \qquad z_4 = 1.5\,\mathrm{e}^{\frac{3}{4}\pi\mathrm{j}}.$$

b) Wie lautet (ungefähr) die Polardarstellung der markierten Zahlen?
(Nutzen Sie Lineal und Geodreieck!)



Aufgabe 2

a) Stellen Sie die folgenden Zahlen in der Form $a + b\mathrm{j}$, $a, b \in \mathbb{R}$ dar:

$$z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{j}}, \qquad z_2 = 3\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{12}\mathrm{j}}, \qquad z_3 = 1.5 \cdot \mathrm{e}^{2\mathrm{j}}, \qquad z_4 = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{j}}$$

b) Berechnen Sie die Polardarstellung zu

$$z_1 = \mathrm{j}, \qquad z_2 = 2 + 3\mathrm{j}, \qquad z_3 = -2, \qquad z_4 = 2 - \mathrm{j},$$
$$z_5 = 1 + 2\mathrm{j}, \qquad z_6 = -1 + 2\mathrm{j}, \qquad z_7 = 1 - 2\mathrm{j}, \qquad z_8 = -1 - 2\mathrm{j}.$$

(Nutzen Sie (wo nötig) einen Taschenrechner.)

Aufgabe 3 (beispielhafte Klausuraufgabe, 12 Minuten)

a) Geben Sie die Polardarstellung von $z_1 = 1 - \mathrm{j}$ an.

b) Stellen Sie $z_2 = 2 \cdot \mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{j}}$ in der Form $a + b\mathrm{j}$, $a, b \in \mathbb{R}$ dar.

c) Berechnen Sie $z_1 \cdot z_2$ und $\frac{z_1}{z_2}$ einerseits mittels der Polardarstellungen und andererseits mittels der Real-/Imaginärteil-Darstellungen.

Aufgabe 4

Berechnen Sie mittels der Polardarstellungen die Lösungen z von $z^2 = w$ mit

a) $w = 3 + 4\mathrm{j}$ (nutzen Sie einen Taschenrechner; vgl. Blatt 4-1, Aufgabe 6),

b) $w = 4 \cdot \mathrm{e}^{\frac{3}{4}\pi\mathrm{j}}$.

Aufgabe 5

a) Geben Sie alle Lösungen zu $z^3 = 1$ an.

(Tipp: Sie können die Lösungen als Nullstellen von $p(z) = z^3 - 1$ wie üblich oder über die Polardarstellung bestimmen.)

b) Geben Sie alle Lösungen zu $z^4 = 1$ an.

c) Geben Sie alle Lösungen zu $z^5 = 1$ an.

Aufgabe 6

a) Zeigen Sie: Jede Überlagerung einer Cosinus- und Sinus-Funktion kann man darstellen als eine verschobene skalierte Cosinus-Funktion:

$$c \cdot \cos(x) + d \cdot \sin(x) \;=\; r \cdot \cos(x - \varphi).$$

Für die Parameter c, d, r und φ gilt dabei $c + d\mathrm{j} = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$.

b) Nutzen Sie a), um

b1) $f(x) = 1.5 \cdot \cos(x - 2)$ in der Form $f(x) = c \cdot \cos(x) + d \cdot \sin(x)$,

b2) $f(x) = 2\cos(x) + 3\sin(x)$ in der Form $f(x) = r \cdot \cos(x - \varphi)$

darzustellen. (Vgl. Blatt 3-2, Aufgabe 8; Tipp zu b1): s. Aufgabe 2.)

c) Welche Amplitude hat die durch

$$f(x) \;=\; 3\cos(x) + 4\sin(x)$$

dargestellte Schwingung?

Aufgabe 7

a) Leiten Sie unter Zuhilfenahme von $\mathrm{e}^{3x\mathrm{j}} = (\mathrm{e}^{x\mathrm{j}})^3$ eine Darstellung von $\sin(3x)$ durch $\sin x$ und $\cos x$ her.

b) Zeigen Sie, dass gilt

$$\cosh(\mathrm{j}x) \;=\; \cos x \qquad \text{und} \qquad \sinh(\mathrm{j}x) \;=\; \mathrm{j}\sin x.$$

Aufgabe 8

Sei $z = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$ mit beliebigem φ.

a) Zeigen Sie, dass (bei $z \neq 0$) für $w = \frac{1}{z}$ gilt: $\operatorname{Re} w = \frac{1}{2}$.

Tipp: Nutzen Sie die Euler-Formel und die Gesetze für trigonometrische Funktionen.

b) Wo liegen die Punkte z für beliebiges φ, wo die Punkte $\frac{1}{z}$?

Aufgabe 9

Zeichnen Sie einige Folgenglieder zu den durch die folgenden Ausdrücke beschriebenen Folgen auf der Zahlengerade.

a) $a_n = \dfrac{2n}{n+1}$,

b) $b_n = (-1)^n \cdot \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$,

c) $c_n = \sin n$,

d) $d_n = \cos\left(2 - \dfrac{1}{n}\right)$,

e) $e_1 = 1,\ e_{n+1} = \dfrac{e_n}{2} + \dfrac{2}{e_n}$,

f) $s_0 = 0,\ s_{n+1} = s_n + \dfrac{1}{2^n}$.

Sind die Folgen konvergent? (Sie brauchen keine exakte Begründung anzugeben.)

Aufgabe 10

Mit einer Konstanten c wird die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch

$$a_1 \;=\; 0 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} \;=\; a_n^2 + c \;\; \text{für } n \geq 1.$$

a) Berechnen Sie für verschiedene Werte von c, z.B. für $c = \pm 0.5$, $c = -1$, $c = -1.5$, $c = -2$, $c = -2.5$, die ersten Folgenglieder.

b) Zeigen Sie:

Für $c > \frac{1}{4}$ ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton wachsend.

Tipp: Es kann helfen, sich zu überlegen, dass die Funktion $f(x) = x^2 - x + c$ für die betrachteten Werte c immer positiv ist.

c) Zeigen Sie:

Ist $c \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}]$, und gilt $|a_n| \leq \frac{1}{2}$, so ist auch $|a_{n+1}| \leq \frac{1}{2}$.

Überlegen Sie sich weiter, dass daraus folgt, dass die Folge für $c \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}]$ beschränkt durch $C = \frac{1}{2}$ ist.

Aufgabe 11 (beispielhafte Klausuraufgabe, 10 Punkte)

Auf einer Geburtstagsfeier mit vielen Gästen soll eine Torte verteilt werden. Damit jeder etwas bekommt, legt der Gastgeber fest, dass jeder, der sich bedient, ein Zehntel dessen, was noch an Torte da ist, nehmen soll.

a) Sei R_n der Anteil der Torte, der noch übrig ist, nachdem sich der n-te Gast bedient hat. Geben Sie eine Formel für R_n an.

b) Nach wieviel Gästen ist nur noch die Hälfte der Torte übrig? Geben Sie dazu einen formelmäßigen Ausdruck an; Sie brauchen diesen nicht genau auszuwerten.