Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik
Prof. Georg Hoever

WS 2022/23
22.12.2022

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Die Aufgaben entstammen meinem *Arbeitsbuch höhere Mathematik*, Springer-Verlag

Übungsblatt 13-1 zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

Aufgabe 1

Berechnen Sie

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2

Schreiben Sie das folgende Gleichungssystem in Matrix-Vektor-Schreibweise:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & & & - & 5x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & & & - & x_4 & = & 2 \\ & & 4x_2 & & & + & 3x_4 & = & -1 \end{array}$$

Aufgabe 3

Manche chemische Reaktionen können in beiden Richtungen stattfinden, z.B. die Reaktion von $2NO_2$ (Stickstoffdioxid) zu N_2O_4 (Distickstofftetroxid) und umgekehrt die Rückreaktion von N_2O_4 in $2NO_2$.

Bei einer bestimmten Temperatur wandeln sich pro Minute 20% des vorhandenen NO_2 in N_2O_4 um und umgekehrt 30% des vorhandenen N_2O_4 in NO_2.

a) Welche Mengen NO_2 und N_2O_4 hat man nach einer Minute, wenn es anfangs 100g NO_2 und 150g N_2O_4 sind?

   Formulieren Sie den Zusammenhang als Matrix-Vektor-Multiplikation.

b) Wie ist es nach zwei und drei Minuten?

Aufgabe 4

Mutter Beimer will verschiedene Weihnachtsplätzchen backen. Sie hat drei Rezepte:

Sandplätzchen	*Mandelhörnchen*	*Makronen*
200g Butter	200g Butter	150g Zucker
150g Zucker	100g Zucker	2 Eier
2 Eier	250g Mehl	150g Mandeln
375g Mehl	100g Mandeln	

Da die Großfamilie zu Besuch kommt, will Mutter Beimer 4mal Sandplätzchen, 2mal Mandelhörnchen und 3mal Makronen backen. Wieviel Zutaten braucht sie?

Formulieren Sie den Sachverhalt als Matrix-Vektor-Multiplikation.

Aufgabe 5

Ein Lebensmittelhändler hat m Filialen $F_1,\ F_2, \ldots, F_m$. In jeder Filiale hat er die gleichen n Artikel $A_1, \ldots, A_n$. Zum Jahreswechsel wird überall Inventur gemacht. Die Anzahl von A_k in Filiale F_l sei $a(F_l, A_k)$. In der internen Buchführung wird ein Artikel A_k mit dem Preis p_k bewertet. Wie groß ist der Warenwert in den einzelnen Filialen?

Formulieren Sie den Sachverhalt als Matrix-Vektor-Multiplikation.

Aufgabe 6

Sei $M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ und $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie (mit einem Taschenrechner) $\vec{a}\,' = M \cdot \vec{a}$, $\vec{b}\,' = M \cdot \vec{b}$ und $\vec{c}\,' = M \cdot \vec{c}$ und zeichnen Sie in einem Koordinatensystem Dreiecke mit den entsprechenden Punkten A, B und C bzw. A', B' und C'. Fällt Ihnen etwas auf?

Aufgabe 7

Sei $M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$.

a) Sei W der Einheitswürfel im $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie für jede Ecke $\vec{p}$ von W den Punkt $M \cdot \vec{p}$ und zeichnen Sie ihn in ein zweidimensionales Koordinatensystem. Verbinden Sie die Punkte, deren entsprechende Ecken in W durch eine Kante verbunden sind.

b) Zeigen Sie, dass $M \cdot \vec{p}$ die Projektion eines Punktes $\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ auf die (x, z)-Ebene E_{xz} in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist, indem Sie den Schnittpunkt von E_{xz} mit einer Geraden mit Richtung $\vec{v}$ durch einen beliebigen Punkt $\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ berechnen.

c) Wie kann man mit Hilfe einer Matrix M die Projektion eines Punktes $\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ auf die (x, y)-Ebene E_{xy} in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ darstellen?

Aufgabe 8

Betrachtet wird das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x \;=\; \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{(I)}$$

und das zugehörige homogene System

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{(H)}$$

a) Geben Sie (durch Raten) zwei verschiedene Lösungen $x_{h,1}$ und $x_{h,2}$ des homogenen Systems (H) an.

b) Verifizieren Sie, dass auch $x_{h,1} + x_{h,2}$, $x_{h,1} - x_{h,2}$ und $3 \cdot x_{h,1}$ Lösungen von (H) sind.

c) Geben Sie (durch Raten) eine Lösung x_s des inhomogenen Systems (I) an.

d) Verifizieren Sie, dass auch $x_s + x_{h,1}$, $x_s + 2 \cdot x_{h,2}$ und $x_s + 2 \cdot x_{h,1} + x_{h,2}$ Lösungen von (I) sind.

e) Geben Sie (durch Raten) eine weitere Lösung $x_{s,2}$ des inhomogenen Systems (I) an.

f) Verifizieren Sie, dass $x_0 = x_{s,2} - x_s$ (also $x_{s,2} = x_s + x_0$) eine Lösung des homogenen Systems (H) ist.

g) Überlegen Sie sich allgemein, warum die Verifikation in b), d) und f) funktionieren.

Aufgabe 9

Betrachtet wird das inhomogene Gleichungssystem $Ax = b$ ($b \neq 0$) (I) und das zugehörige homogene System $Ax = 0$ (H). $x_{h,1}$ und $x_{h,2}$ seien zwei Lösungen von (H), $x_{s,1}$ und $x_{s,2}$ zwei Lösungen von (I)

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) $x_{h,1} + x_{h,2}$ ist Lösung von (H).

b) $x_{s,1} - x_{h,1}$ ist Lösung von (H).

c) $x_{s,1} - x_{h,1}$ ist Lösung von (I).

d) $x_{s,1} - x_{s,2}$ ist Lösung von (H).

e) $2 \cdot x_{s,1} - x_{s,2}$ ist Lösung von (I).

f) Jedes x der Form $x = \alpha_1 \cdot x_{h,1} + \alpha_2 \cdot x_{h,2}$ ($\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$) ist Lösung von (H).

g) Jedes x der Form $x = \alpha_1 \cdot x_{s,1} + \alpha_2 \cdot x_{s,2}$ ($\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$) ist Lösung von (I).

h) Jedes x der Form $x = x_{s,1} + \alpha_1 \cdot x_{h,1} + \alpha_2 \cdot x_{h,2}$ ($\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$) ist Lösung von (I).