

## Übungsblatt 12-2 zur Vorlesung Höhere Mathematik 1

### Aufgabe 1

a) Geben Sie eine Darstellung der Geraden  $g$  im  $\mathbb{R}^3$  an, die durch

$$P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

verläuft.

Liegt  $Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$  auf  $g$ ?

b) Geben Sie eine Darstellung der Geraden  $g$  im  $\mathbb{R}^4$  an, die durch

$$P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

verläuft?

### Aufgabe 2

Welche Punkte auf der Geraden  $g = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$  haben

a) von  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  den Abstand 3,      b) von  $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$  den Abstand 5?

### Aufgabe 3

Betrachtet wird das Dreieck mit den Eckpunkten

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Gesucht ist der Lotfußpunkt  $L$  des Lots von  $C$  auf die Seite  $\overline{AB}$  bzw. auf die Gerade  $g$ , auf der diese Seite liegt.

Berechnen Sie  $L$  auf drei verschiedene Arten:

- Bestimmen Sie  $L$  als Schnittpunkt von  $g$  und der Geraden  $h$ , die durch  $C$  führt und senkrecht zu  $g$  ist.
- Bestimmen Sie  $L$  als den Punkt auf  $g$ , so dass der Verbindungsvektor von  $L$  zu  $C$  senkrecht auf dem Richtungsvektor von  $g$  steht.
- Bestimmen Sie  $L$  als nächstliegenden Punkt auf  $g$  an  $C$ , indem Sie den Abstand  $d(\lambda)$  von  $C$  zu einem allgemeinen Punkt der Geraden  $g$  in Abhängigkeit von dem Parameter  $\lambda$  berechnen und die Minimalstelle der Funktion  $d(\lambda)$  bestimmen.

Berechnen Sie schließlich die Höhe und damit die Fläche des Dreiecks.

#### Aufgabe 4

In Aufgabe 16 von Blatt 12-1 und Aufgabe 3 werden insgesamt fünf verschiedene Möglichkeiten zur Berechnung der Fläche eines ebenen Dreiecks betrachtet. Stellen Sie diese Möglichkeiten zusammen, und überlegen Sie, welche der Möglichkeiten auch in drei- und höherdimensionalen Räumen funktionieren.

#### Aufgabe 5

- a) Stellen Sie die Ebene durch die Punkte  $P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  in Parameter- und in Normalendarstellung dar.

Testen Sie, ob der Punkt  $Q = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  in der Ebene liegt.

- b) Stellen Sie die Ebene, die durch  $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  führt und senkrecht zu  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  ist, in Parameter- und in Normalendarstellung dar.

#### Aufgabe 6

Stellen

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

und

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

die gleiche Ebene dar?

Überlegen Sie sich verschiedene Möglichkeiten, dies zu überprüfen.

#### Aufgabe 7

- a) Geben Sie eine Normalendarstellung der Geraden

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

sowie eine Darstellung  $x_2 = f(x_1)$  für die Punkte  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  der Geraden an.

- b) Betrachtet wird die Hyperebene  $E$  im  $\mathbb{R}^4$ , die durch

$$E = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 7 \right\}$$

beschrieben wird.

- b1) Geben Sie verschiedene Punkte  $P$  an, die in  $E$  liegen.

- b2) Geben Sie verschiedene Richtungsvektoren  $\vec{v}$  zu  $E$  an.

## Aufgabe 8

Berechnen Sie die Schnittmenge von

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

mit der Geraden

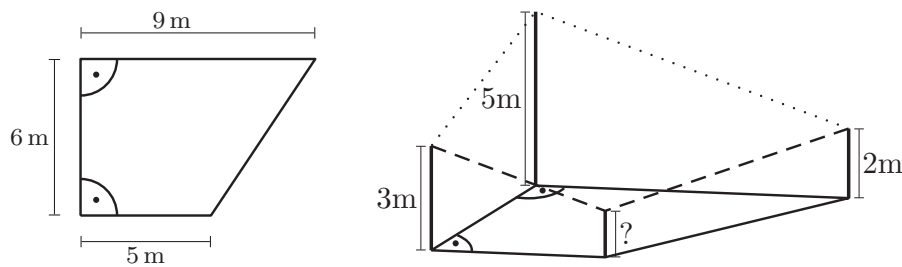
$$g = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

indem Sie

- die Parameterdarstellung von  $E$  benutzen.
- $E$  in Normalendarstellung darstellen und diese nutzen.

## Aufgabe 9 (beispielhafte Klausuraufgabe, $6 + 10 + 4 = 20$ Minuten)

In Krummhausen wird ein Schuppen gebaut mit dem links abgebildeten Grundriss. An drei Ecken stehen schon (unterschiedlich hohe) Säulen (s. rechts).



- Wie groß ist der Winkel zwischen den (gepunktet dargestellten) Dachkanten an der 5m hohen Säule?
- Zeichnen Sie in die Abbildung rechts ein Koordinatensystem ein und geben Sie entsprechend Ihres Koordinatensystems eine Normalendarstellung für die durch die Dachfläche gebildete Ebene  $E$  an.
- Wie hoch muss die Säule an der vierten Ecke sein, damit ein ebenes Dach passend aufliegt?

### Aufgabe 10

Betrachtet wird die (Ursprungs-)Ebene

$$E = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bestimmen Sie den nächstgelegenen Punkt  $Q$  auf  $E$  an den Punkt  $\vec{p} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$  auf folgende Weisen:

- als Schnittpunkt der Ebene mit der Geraden, die durch  $P$  führt und einen zu  $E$  orthogonalen Richtungsvektor besitzt,
- als den Punkt auf  $E$ , so dass der Differenzvektor  $\vec{p} - \vec{q}$  senkrecht auf den die Ebene aufspannenden Richtungsvektoren steht.

### Aufgabe 11

Betrachtet wird der Vektorraum  $V$  der auf dem Intervall  $[0; 2\pi]$  stetigen Funktionen mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) \cdot g(x) dx$$

und die Vektoren  $f_1, f_2, f_3 \in V$  mit

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = \cos x \quad \text{und} \quad f_3(x) = \sin x$$

sowie  $g \in V$  mit  $g(x) = x$ .

Welche Funktion auf der Ursprungs-Ebene, die durch  $f_1, f_2$  und  $f_3$  aufgespannt wird, liegt am nächsten an  $g$ ?

Anleitung: Gesucht ist die Linearkombination  $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3$ , so dass der Differenzvektor  $g - f$  senkrecht auf den aufspannenden Vektoren  $f_i$  steht.

Tipp: Vergleiche Aufgabe 10, b).