

## Übungsblatt 12-1 zur Vorlesung Höhere Mathematik 1

### Aufgabe 1

Sei  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  bzw.  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

- Berechnen Sie  $\|\vec{a}\|$ .
- Berechnen Sie  $\|5\vec{a}\|$  einerseits, indem Sie zunächst die entsprechenden Vektoren  $5\vec{a}$  und dann deren Norm berechnen und andererseits mit Hilfe von Satz 7.3.13, 1..
- Oft will man zu einem Vektor  $\vec{a}$  einen *normalisierten* Vektor haben, d.h. einen Vektor  $\vec{b}$ , der in die gleiche Richtung wie  $\vec{a}$  zeigt (also  $\vec{b} = \lambda\vec{a}$  mit  $\lambda \in \mathbb{R}$ ), und der die Länge 1 hat.

Geben Sie jeweils einen normalisierten Vektor  $\vec{b}$  zu den angegebenen Vektoren  $\vec{a}$  an.

Wie muss man dazu allgemein  $\lambda$  wählen?

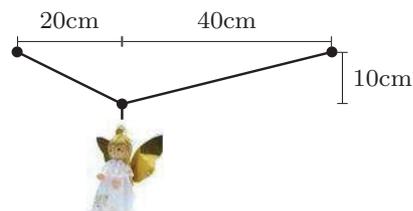
### Aufgabe 2

Welchen Abstand haben

- die Punkte  $P_1 = (1, 3)$  und  $P_2 = (4, -1)$  im  $\mathbb{R}^2$ ,
- die Punkte  $Q_1 = (1, 1, -1)$  und  $Q_2 = (0, 0, 1)$  im  $\mathbb{R}^3$ ?
- die Punkte  $R_1 = (1, 2, 3, 4)$  und  $R_2 = (2, 1, 2, 1)$  im  $\mathbb{R}^4$ ?

### Aufgabe 3

Ein 100g schwerer Weihnachtsengel ist wie abgebildet an Fäden aufgehängt. Wie groß sind die (Zug-)Kräfte in den Fäden?



Anleitung: Die nach unten gerichtete Gewichtskraft des Engels muss dargestellt werden als Linearkombination von in Richtung der Fäden gerichteten Kraftvektoren. (Nutzen Sie einen Taschenrechner.)

### Aufgabe 4

Ein Schiff will in nord-östliche Richtung fahren, also bezüglich eines entsprechenden Koordinatensystems in Richtung  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Seine Höchstgeschwindigkeit beträgt 13 Knoten. Die Geschwindigkeit der Meeresströmung, mit der das Schiff abtreibt, ist (in Knoten)  $\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

In welche Richtung muss das Schiff steuern, damit es (mit der Meeresströmung zusammen) seinen anvisierten Kurs hält und möglichst schnell voran kommt?

### Aufgabe 5

Berechnen Sie (wo nötig unter Benutzung eines Taschenrechners) den Winkel, den  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  einschließen, zu

a)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,

b)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,

c)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ ,

d)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ,

e)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

Zeichnen Sie in a) die Situation und messen Sie den berechneten Werte nach.

Versuchen Sie, sich die Vektoren und Winkel bei b), c) und d) vorzustellen.

### Aufgabe 6

a) Wie lang ist die Diagonale in einem (dreidimensionalen) Würfel bei einer Kantenlänge 1?

Welchen Winkel schließt sie mit einer Kante ein?

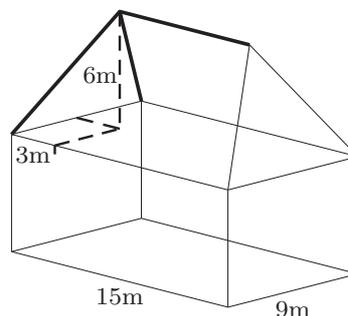
b) Welche Werte ergeben sich in einem  $n$ -dimensionalen Würfel?

c) Was ergibt sich bei b) für  $n \rightarrow \infty$ ?

### Aufgabe 7

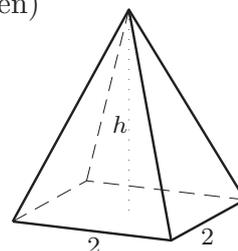
Welchen Winkel schließen die Dachkanten beim nebenstehend abgebildeten Walmdach untereinander bzw. mit dem Dachfirst ein?

Nutzen Sie einen Taschenrechner.



### Aufgabe 8 (beispielhafte Klausuraufgabe, 10 Minuten)

Geben Sie einen formelmäßigen Ausdruck an, unter welchem Winkel sich die Kanten einer Pyramide mit Basislänge 2 und Höhe  $h$  an der Spitze treffen (s. Skizze).



### Aufgabe 9

Geben Sie orthogonale Vektoren an zu

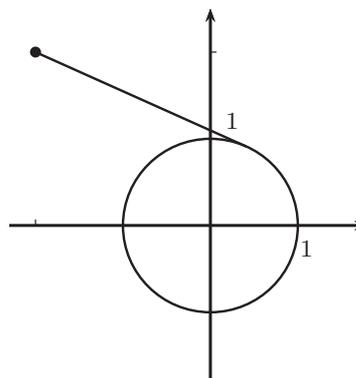
a)  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,    b)  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,    c)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,    d)  $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,    e)  $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

### Aufgabe 10 (vgl. Blatt 8-1, Aufgabe 14)

Das nebenstehende Bild zeigt schematisch eine Papieraufwicklung. Die Walze hat den Radius 1, die Papierbahn kommt vom Punkt  $(-2, 2)$ .

An welchem Punkt berührt die Papierbahn die Walze?

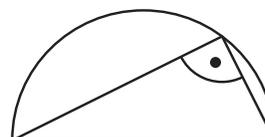
Anleitung: Stellen Sie den oberen Halbkreis der Walze als Funktion  $f$  dar und bestimmen Sie den Punkt  $X$ , bei dem der radiale Vektor senkrecht zum Verbindungsvektor von  $P$  zu  $X$  ist.



### Aufgabe 11

Beweisen Sie den Satz des Thales:

*Jeder Winkel im Halbkreis ist ein rechter Winkel.*



Anleitung: Legen Sie das Koordinatensystem geeignet fest und stellen Sie den Halbkreis als Funktion dar. Beschreiben Sie dann die beiden Schenkel des Winkels als Vektoren und betrachten Sie deren Skalarprodukt.

### Aufgabe 12

Betrachtet wird der Vektorraum  $V$  der auf dem Intervall  $[0; 2\pi]$  stetigen Funktionen mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) \cdot g(x) dx$$

sowie die Vektoren  $f_1, f_2, f_3 \in V$  mit

$$f_1(x) = 1 - \frac{1}{\pi}x, \quad f_2(x) = \cos x \quad \text{und} \quad f_3(x) = \sin x.$$

a) Berechnen Sie die Skalarprodukte  $\langle f_1, f_2 \rangle$  und  $\langle f_1, f_3 \rangle$ .

(Tipp: s. Blatt 11-1, Aufgabe 1, b1))

b) Bestimmen Sie die Längen  $\|f_1\|$ ,  $\|f_2\|$  und  $\|f_3\|$ .

c) Bestimmen Sie den Abstand von  $f_1$  zu  $f_2$  und den von  $f_1$  zu  $f_3$ .

Veranschaulichen Sie sich die Situation.

### Aufgabe 13

Sei  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

- Berechnen Sie den Winkel  $\varphi$  zwischen  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  mit Hilfe des Skalarprodukts.
- Berechnen Sie  $\vec{a} \times \vec{b}$ .
- Verifizieren Sie die Gleichung  $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin \varphi$ .

### Aufgabe 14

- Geben Sie  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  an mit

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}).$$

- Untersuchen Sie, ob die folgenden Gleichungen gelten ( $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ):

b1)  $\vec{a} \times (\lambda \cdot \vec{b}) = \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ ,

b2)  $\vec{a} \times (\vec{c} \cdot \vec{b}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ .

### Aufgabe 15

Geben Sie mehrere Vektoren  $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$  an mit  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Überlegen Sie sich zunächst anschaulich, welche  $\vec{b}$  in Frage kommen, und rechnen Sie dann.

### Aufgabe 16

- Berechnen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms, das durch  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  aufgespannt wird,

- durch die Formel „Seite mal Höhe“, indem Sie mit dem Winkel zwischen  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  die Höhe berechnen,
- indem Sie die Situation ins Dreidimensionale übertragen und das Vektorprodukt zu Hilfe nehmen.

- Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(Tipp: Durch Verdoppelung eines Dreiecks kann man ein Parallelogramm erhalten.)