Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

WS 2022/23
09.12.2022

Übungsblatt 11-2 zur Vorlesung Höhere Mathematik 1

Aufgabe 1

a) Zeichnen Sie die Punkte $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $S = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und die zugehörigen Ortsvektoren $\vec{p}$, $\vec{q}$ und $\vec{s}$.

b) Was ergibt $\vec{p} + \vec{q}$, was $\vec{p} - \vec{s}$?

c) Welcher Vektor führt von P zu S, welcher von Q zu P?

d) Bestimmen und zeichnen Sie $2 \cdot \vec{p}$, $-\frac{1}{2} \cdot \vec{p}$, $2 \cdot (\vec{p} + \vec{q})$.

e) Wie erhält man den Punkt T, der genau zwischen P und Q liegt?

Aufgabe 2

Berechnen Sie

$$\vec{a} + \vec{b}, \qquad \vec{a} - \vec{b}, \qquad -\vec{a}, \qquad 3\vec{b}, \qquad 2 \cdot (\vec{a} + \vec{b}), \qquad 2\vec{a} + 2\vec{b}$$

für die folgenden Fälle:

a) im Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Zeichnen Sie die Vektoren.

b) im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Versuchen Sie, sich die Vektoren vorzustellen.

c) im Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

d) im Vektorraum aller Polynome mit

$$\vec{a} \text{ als dem Polynom } a(x) = x^3 + x + 1 \quad \text{und} \quad \vec{b} \text{ als } b(x) = x^2 - 2x.$$

Aufgabe 3

a) Stellen Sie die Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ dar.

b) Stellen Sie $p(x) = 2x^2 + 2x + 1$ dar als Linearkombination von

$$v_1(x) \;=\; x+1, \quad v_2(x) \;=\; x^2 \quad \text{und} \quad v_3(x) \;=\; x^2+1.$$

Aufgabe 4

Ein Roboter kann auf einer Schiene entlang der x-Achse fahren und hat einen diagonalen Greifarm (Richtung $\binom{1}{1}$), den er aus- und einfahren kann.

In welcher Position muss der Roboter stehen, um einen Gegenstand bei $\binom{1}{3}$ zu fassen?

Formulieren Sie das Problem mittels Linearkombination von Vektoren.

Aufgabe 5

Für welche Werte von c sind drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ c \end{pmatrix}$$

linear unabhängig?

Aufgabe 6

Machen Sie sich anschaulich klar, welche der folgenden Mengen ein Erzeugendensystem bzw. sogar eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bilden.

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ b) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ c) $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

d) $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

Aufgabe 7

Sei P_n der Vektorraum aller Polynome vom Grad $\leq n$.

a) Welche der folgenden Mengen bilden ein Erzeugendensystem, welche sogar eine Basis von P_2?

1) $\{1,\ x,\ x^2\}$, 2) $\{1+x,\ 1+x^2\}$, 3) $\{1,\ 1+x,\ 1+x^2\}$

4) $\{1+x,\ x^2,\ 1+x+x^2\}$, 5) $\{1,\ 1+x,\ 1+x^2,\ x^2\}$

b) Welche Dimension hat P_2?

c) Welche Dimension hat P_n?

Aufgabe 8

Sei V die Menge aller in x-Richtung verschobenen und in y-Richtung gestreckten oder gestauchten Sinus- und Cosinus-Funktionen.

a) Überlegen Sie sich, dass V ein Vektorraum ist.

b) Geben Sie eine Basis von V an.

(Tipp: Vgl. Blatt 3-2, Aufgabe 8, und Blatt 4-2, Aufgabe 6.)

Aufgabe 9

a) Rechnen Sie nach, dass $f(x) = x$ und $f(x) = \frac{1}{x}$ Lösungen der Differenzialgleichung

$$x^2 \cdot f''(x) + x \cdot f'(x) - f(x) \ = \ 0.$$

sind, und dass sogar jedes f mit $f(x) = c_1 \cdot x + c_2 \cdot \frac{1}{x}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ beliebig) eine Lösung der Differenzialgleichung ist.

b) Rechnen Sie nach, dass, falls die Funktionen f_1 und f_2 Lösungen der Differenzialgleichung

$$a_2(x) \cdot f''(x) + a_1(x) \cdot f'(x) + a_0(x) \cdot f(x) \ = \ 0$$

(mit fest vorgegebenen Funktionen a_0, a_1 und a_2) sind, auch immer jede Linearkombination $f(x) = c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x)$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ beliebig) eine Lösung ist.