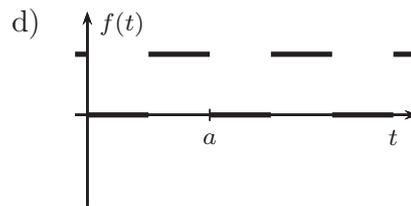
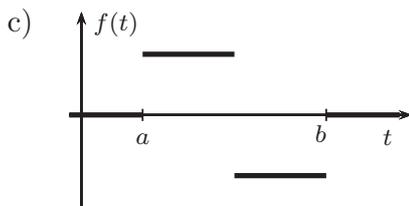
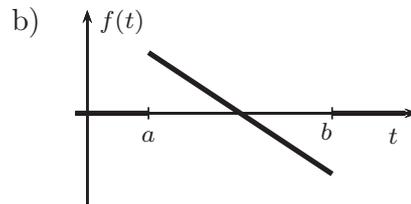
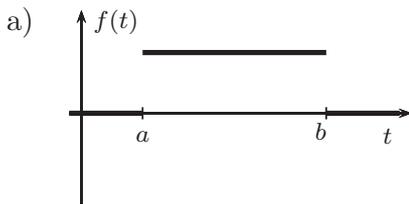


Übungsblatt 10-2 zur Vorlesung Höhere Mathematik 1

Aufgabe 1

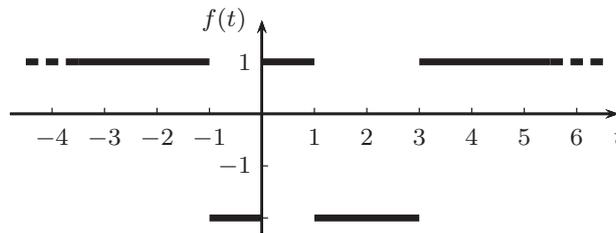
Skizzieren Sie qualitativ die Flächenfunktion $F(x) := \int_a^x f(t) dt$ zu den abgebildeten Funktionen f .



Kontrollieren Sie an den Bildern, dass $F' = f$ gilt.

Aufgabe 2 (beispielhafte Klausuraufgabe, 8 Minuten)

Sei $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ die Flächenfunktion zur skizzierten Funktion f .



- Geben Sie $F(1)$, $F(2)$ und $F(-1)$ an.
- Geben Sie sämtliche Stellen x an, für die $F(x) = 0$ gilt.

Aufgabe 3

Der Fahrtschreiber eines LKWs speichere die momentane Geschwindigkeit des Fahrzeugs jede zehntel Sekunde. Wie lässt sich daraus die zurückgelegte Strecke ungefähr berechnen?

Stellen Sie einen Bezug zum Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung (s. Satz 6.2.3) her.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die folgenden Stammfunktionen:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int x^3 dx, & \text{b) } \int (x^3 + 1) dx, & \text{c) } \int (x + 1)^3 dx, \\ \text{d) } \int (2x + 1)^3 dx, & \text{e) } \int (x^2 + 1)^3 dx, & \text{f) } \int x \cdot (x^2 + 1)^3 dx, \\ \text{g) } \int \sqrt{x} dx, & \text{h) } \int \frac{1}{x^2} dx, & \text{i) } \int \frac{1}{x} dx, \\ \text{j) } \int \frac{1}{(x-1)^2} dx, & \text{k) } \int \cos(x+2) dx, & \text{l) } \int e^{2x} dx. \end{array}$$

Aufgabe 5

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int_{-1}^2 (2x + 1) dx, & \text{b) } \int_0^1 \frac{1}{x-3} dx, & \text{c) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x) dx, \\ \text{d) } \int_2^{-1} (2x + 1) dx, & \text{e) } \int_{-1}^1 e^{-|x|} dx, & \text{f) } \int_{-1}^1 x \cdot |x| dx. \end{array}$$

Aufgabe 6

Versuchen Sie, eine Stammfunktion zu raten, testen Sie durch zurück-Ableiten und passen Sie ggf. Konstanten an:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int (5x - 3)^6 dx, & \text{b) } \int \sqrt{3x + 1} dx, & \text{c) } \int \frac{1}{(2x + 3)^2} dx, \\ \text{d) } \int \frac{3}{4x - 1} dx, & \text{e) } \int \sin(2x + 1) dx, & \text{f) } \int e^{5x-3} dx. \end{array}$$

Aufgabe 7

Berechnen Sie die folgenden Integrale in Abhängigkeit der auftretenden Parameter.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int_0^2 (ax + b) dx, & \text{b) } \int_c^d (y^2 + 1) dy, \\ \text{c) } \int_0^2 x \cdot y^2 dx, & \text{d) } \int_0^2 x \cdot y^2 dy. \end{array}$$

Aufgabe 8

Berechnen Sie $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$.

Aufgabe 9

Sei $a > 0$. Zeigen Sie für die folgenden uneigentlichen Integrale:

$$\text{a) } \int_1^{\infty} \frac{1}{x^a} dx \text{ existiert} \Leftrightarrow a > 1, \quad \text{b) } \int_0^1 \frac{1}{x^a} dx \text{ existiert} \Leftrightarrow a < 1.$$

Aufgabe 10

Gemäß Blatt 10-1, Aufgabe 4, ist die Länge L des Funktionsgraphen zu einer Funktion $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Berechnen Sie die Länge einer Kette, die mit Konstanten a und b im Intervall $[-x_0, x_0]$ gegeben ist durch

$$f(x) = a \cosh \frac{x}{a} + b.$$

(Vgl. Blatt 2-1, Aufgabe 10; Tipp: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.)

Aufgabe 11

Im Jahr 2020 galten folgende Eckdaten für das linear-progressive Einkommensteuermodell in Deutschland:

Beträge bis zu 9408€ werden nicht versteuert (Grundfreibetrag). Der Steuersatz steigt dann von 14% (Eingangssteuersatz) linear auf 23.97% bei 14532€ und weiter linear bis 42% (Spitzensteuersatz) bei 57051€ zu versteuerndem Einkommen an. Ab 270501€ beträgt er 45%. (Vgl. Blatt 1-1, Aufgabe 4.)

Die Steuer berechnet sich als Integral über den Steuersatz bis zum zu versteuernden Jahreseinkommen (vgl. Blatt 10-1, Aufgabe 6).

Wieviel Steuern musste ein Arbeitnehmer mit einem zu versteuernden Jahreseinkommen x_0 zwischen 9409€ und 14532€ zahlen?

Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem offiziellen Gesetzestext.

§ 32a Einkommensteuertarif

(Quelle: Bundesgesetzblatt, www.gesetze-im-internet.de/estg/_32a.html)

(1) Die tarifliche Einkommensteuer bemisst sich nach dem zu versteuernden Einkommen. Sie beträgt [...] jeweils in Euro für zu versteuernde Einkommen

1. bis 9 408 Euro (Grundfreibetrag): 0;
2. von 9 409 Euro bis 14532 Euro: $(972,87 \cdot y + 1\,400) \cdot y$;
3. von 14 533 Euro bis 57051 Euro: $(212,02 \cdot z + 2\,397) \cdot z + 972,79$;
4. von 57 052 Euro bis 270 500 Euro: $0,42 \cdot x - 8\,963,74$;
5. von 270 501 Euro an: $0,45 \cdot x - 17\,078,74$.

Die Größe „y“ ist ein Zehntausendstel des den Grundfreibetrag übersteigenden Teils des auf einen vollen Euro-Betrag abgerundeten zu versteuernden Einkommens. Die Größe „z“ ist ein Zehntausendstel des 14 532 Euro übersteigenden Teils des auf einen vollen Euro-Betrag abgerundeten zu versteuernden Einkommens. Die Größe „x“ ist das auf einen vollen Euro-Betrag abgerundete zu versteuernde Einkommen. Der sich ergebende Steuerbetrag ist auf den nächsten vollen Euro-Betrag abzurunden.