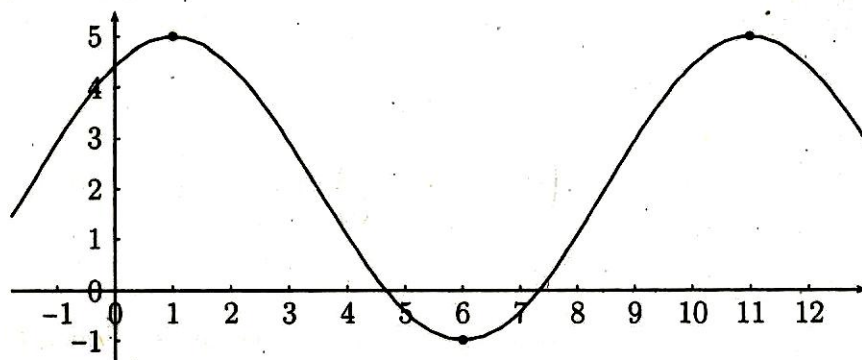


Aufgabe 1 (4 + 2 + 3 = 9 Punkte)

Betrachtet wird die in der Skizze abgebildete Cosinus-förmige Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die bei $(1, 5)$, $(6, -1)$ und $(11, 5)$ Extremstellen besitzt.



a) Geben Sie eine Funktionsvorschrift für f an:

$$f(x) = 3 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{10} \cdot (x-1)\right) + 2$$

b) Begründen Sie konkret, warum f

b1) nicht injektiv ist,

$$f(1) = f(11)$$

b2) nicht surjektiv ist.

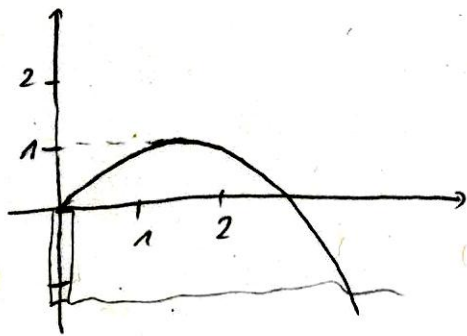
$$\text{Es gibt kein } x \text{ mit } f(x) = 6$$

c) Geben Sie in der Tabelle jeweils Intervalle D und W an, so dass die eingeschränkte Funktion $f: D \rightarrow W$ die genannte Eigenschaft hat.

Sie brauchen Ihre Angabe nicht zu begründen.

$f: D \rightarrow W$ ist	D	W
injektiv aber nicht surjektiv	$[1; 6]$	$\mathbb{R}$
surjektiv aber nicht injektiv	$\mathbb{R}$	$[-1; 5]$
bijektiv	$[1; 6]$	$[-1; 5]$

Aufgabe 2



Bei einem HO-System in Meter-Einheit
mit Ursprung oben auf dem
Sockel kann man den Strahl
beschreiben durch

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ mit}$$

$$0 = f(0) = c$$

und wegen des 45° -Winkels

$$1 = f'(0) = b,$$

$$\text{also } f(x) = ax^2 + x$$

Für die Scheitelpunktstelle x_s gilt

$$0 = f'(x_s) = 2ax_s + 1 \Rightarrow x_s = -\frac{1}{2a}$$

Dort gilt:

$$1 = f(x_s) = a \cdot \left(-\frac{1}{2a}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2a}\right) = \frac{1}{4a} - \frac{1}{2a} = -\frac{1}{4a}$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

$$\text{Also ist } f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x$$

Gesucht ist die positive Stelle x mit $f(x) = -\frac{5}{4}$:

$$-\frac{1}{4}x^2 + x = -\frac{5}{4} \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ oder } x = 5$$

$\Rightarrow$ Der Abstand ist 5m.

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Geben Sie die Werte der folgenden Ausdrücke an:

$$\sin\left(\frac{13}{2}\pi\right) = 1.$$

$$\tan\frac{\pi}{4} = 1$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{4}\pi$$

$$4^{-0.5} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

$$0.5^{-4} = 2^4 = 16$$

$$\log_2 16 = 4$$

$$\log_3 \frac{1}{9} = -2$$

Aufgabe 4 (4 + 4 = 8 Punkte)

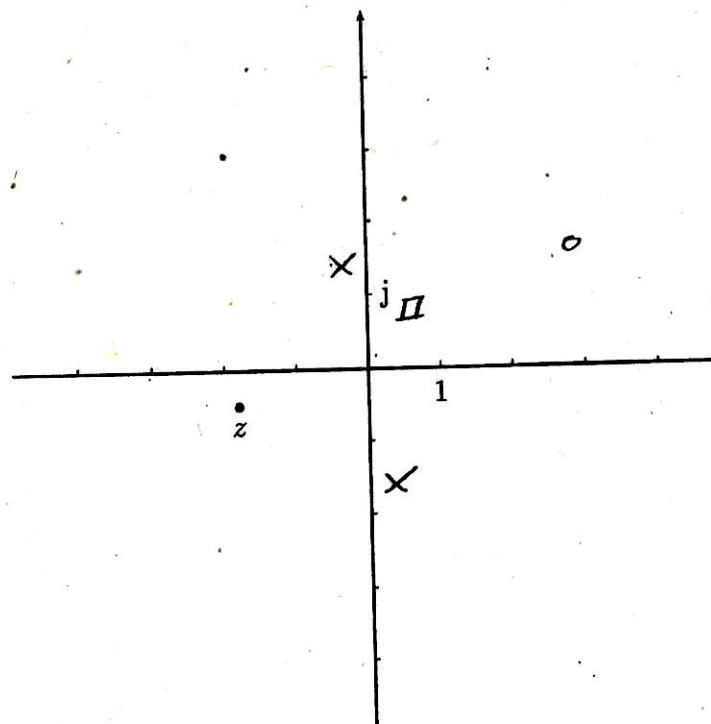
- a) Markieren Sie die richtige alternative Darstellung (gerundet) der folgenden komplexen Zahlen. (Sie brauchen Ihre Angabe nicht zu begründen)

$3 - 4j =$	
$5 \cdot e^{-1.83j}$	
$5 \cdot e^{-0.93j}$	X
$5 \cdot e^{0.47j}$	
$5 \cdot e^{1.37j}$	
$7 \cdot e^{-1.83j}$	
$7 \cdot e^{-0.93j}$	
$7 \cdot e^{0.47j}$	
$7 \cdot e^{1.37j}$	

$2 \cdot e^{\frac{2}{5}\pi j} =$	
$1.90 + 0.62j$	
$1.90 - 0.62j$	
$-1.90 + 0.62j$	
$-1.90 - 0.62j$	
$0.62 + 1.90j$	
$0.62 - 1.90j$	
$-0.62 + 1.90j$	X
$-0.62 - 1.90j$	

- b) Markieren Sie in der Skizze zu der gegebenen komplexen Zahl z die ungefähre Lage

- von z^2 mit einem Kringel (o)
- aller Lösungen w zu $w^2 = z$ mit Kreuzen (x)
- einer Lösung w zu $w^3 = z$ mit einem Quadrat (□)



Aufgabe 5 (12 Punkte)

Geben Sie die folgenden Grenzwerte (in $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$) an.

(Sie brauchen Ihre Angabe nicht zu begründen.)

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 2n + 1}{(n+2) \cdot (2-n)} = -\infty$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^2}{(n-1) \cdot (n+5)} = 4$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{3^n} = 0$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \cdot 2^n}{(n+1) \cdot 3^n} = 0$$

$$\text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \infty$$

$$\text{f) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} = 1$$

$$\text{g) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^2} - 1 \right) = -\infty$$

$$\text{h) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{3^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln x} = \infty$$

$$\text{j) } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x = 0$$

$$\text{k) } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty$$

$$\text{l) } \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

Aufgabe 6

$$a1) \quad a_2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$a_3 = \frac{1}{\frac{4}{3}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{3}{4} + \frac{4}{9} = \frac{27+16}{36} = \frac{43}{36}$$

$$a2) \quad a_2 = \frac{1}{-3} + \frac{1}{3} \cdot (-3) = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$$

$$a_3 = \frac{1}{-\frac{4}{3}} + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{43}{36}$$

b) Für den Grenzwert a gilt

$$a = \frac{1}{a} + \frac{1}{3}a \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{3}a^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Da bei positiven Startwert offensichtlich alle Folgenglieder positiv sind, ist dann der Grenzwert $+\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Da bei negativen Startwert offensichtlich alle Folgenglieder negativ sind, ist dann der Grenzwert $-\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Aufgabe 7

a) $g(x) = 1 - \frac{1}{3}x$

$$\Rightarrow d(x) = \sqrt{(x-1)^2 + (g(x) - (-1))^2}$$

$$= \sqrt{(x-1)^2 + \left(2 - \frac{1}{3}x\right)^2}$$

Offensichtlich gilt $d(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \pm\infty$.

d.h. für die Min. stelle gilt

$$0 = d'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dots}} \cdot \left[2(x-1) + 2 \cdot \left(2 - \frac{1}{3}x\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \right]$$

$$\Leftrightarrow 0 = x-1 + \left(2 - \frac{1}{3}x\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = x-1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{9}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{10}{9}x = \frac{5}{3} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow L = \left(\frac{3}{2}; g\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

b) $g = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

$$\vec{PL} \perp g \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow 0 = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

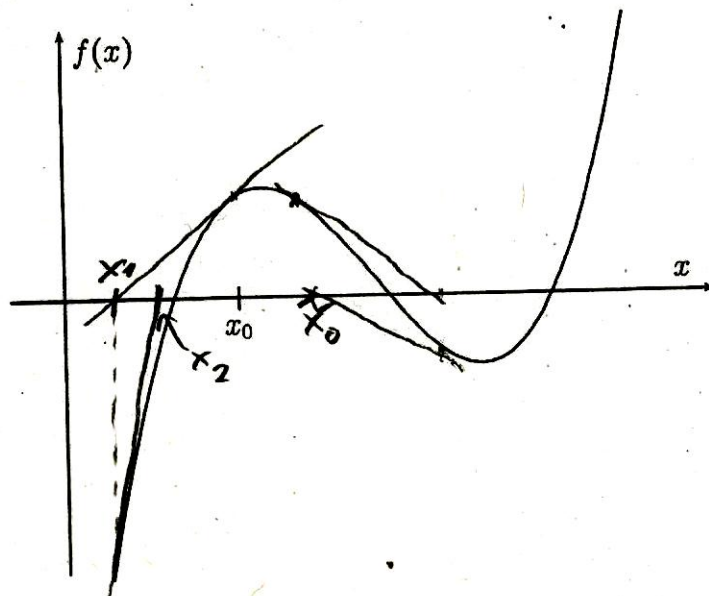
$$= -5 + \lambda \cdot 10$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \vec{l} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8 (4 + 4 = 8 Punkte)

- a) Betrachtet wird das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle zu der in der Grafik dargestellten Funktion f .



- a1) Skizzieren Sie im Bild zwei Schritte des Newton-Verfahrens ausgehend vom Startwert x_0 .
- a2) Skizzieren Sie im Bild die ungefähre Lage eines Startwerts $\tilde{x}_0$, so dass sich beim Newton-Verfahren eine periodische Folge ergibt.
- b) Führen Sie ausgehend von $x_0 = 1$ zwei Schritte des Newton-Verfahrens zur Bestimmung einer Nullstelle von

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 3$$

durch.

$$\text{Newton-Iteration: } x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\text{Hier: } f'(x) = 3x^2 - 6x + 1, \text{ also}$$

$$x_1 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \frac{2}{-2} = 2$$

$$x_2 = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{1}{1} = 1$$

Aufgabe 9

$$\int e^{2x} \sin(5x) dx = e^{2x} \left(-\frac{1}{5}\right) \cos(5x) - \int 2e^{2x} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cos(5x) dx$$

$$= -\frac{1}{5} e^{2x} \cos(5x) + \frac{2}{5} \int e^{2x} \cos(5x) dx$$

$$= -\frac{1}{5} e^{2x} \cos(5x) + \frac{2}{5} \left[e^{2x} \cdot \frac{1}{5} \sin(5x) - \int 2e^{2x} \cdot \frac{1}{5} \sin(5x) dx \right]$$

$$= \left(-\frac{1}{5} e^{2x} \cos(5x) + \frac{2}{25} e^{2x} \sin(5x) \right) - \frac{4}{25} \int e^{2x} \sin(5x) dx$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{4}{25} \right) \cdot \int e^{2x} \sin(5x) dx =$$

$$\Leftrightarrow \int e^{2x} \sin(5x) dx = \frac{25}{29}$$

$$= -\frac{5}{29} e^{2x} \cos(5x) + \frac{2}{29} e^{2x} \sin(5x)$$

Aufgabe 10

a) Kosten für Sorte 1 $\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$ $\cdot \begin{pmatrix} 2 \text{ €} \\ 1 \text{ €} \\ 4 \text{ €} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \text{ €} \\ 2,3 \text{ €} \\ 1,6 \text{ €} \end{pmatrix}$

b) Seien S_1, S_2, S_3 drei Mengen von Sorte 1, 2 bzw. 3:

Dann gilt in kg:

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 0.5 & 0.3 & 0.6 \\ 0 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.5 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

Als eerste te bepalen de matrix:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 0,5 & 0,4 & 0,3 & 0,4 \\ 0,5 & 0,3 & 0,6 & 0,5 \\ 0 & 0,3 & 0,1 & 0,1 \end{array} \right) \cdot 2 \quad -I \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,8 & 0,6 & 0,8 \\ 0 & -0,1 & 0,3 & 0,1 \\ 0 & 0,3 & 0,1 & 0,1 \end{array} \right) \cdot (-10) \\ & \quad \quad \quad + 3 \cdot II \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,8 & 0,6 & 0,8 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0,4 \end{array} \right) \begin{array}{l} -0,6 \cdot III \\ + 3 \cdot III \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,8 & 0 & 0,56 \\ 0 & 1 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 & 0,4 \end{array} \right) - 0,8 \cdot II \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0,4 \\ 0 & 1 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 & 0,4 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$\Rightarrow 0.4 \text{ kg Sorte 1, } 0.2 \text{ kg Sorte 2, } 0.4 \text{ kg Sorte 3}$

Aufgabe 11

a) $d = 4$

b) Es ist $\det A = -3 + 0 + 0 - (-4d) - 4 - 0 = -7 + 4d$

Also $\det A = 5 \Leftrightarrow -7 + 4d = 5 \Leftrightarrow 4d = 12 \Leftrightarrow d = 3$

c) $A^{\text{nicht}} \text{ inv. bar} \Leftrightarrow \det A = 0 \Leftrightarrow -7 + 4d = 0 \Leftrightarrow d = \frac{7}{4}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ & * & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ \vdots \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow 1 + 4d = -3$$

$$\Rightarrow d = -1$$

e) $A^{-1} \cdot A = I \Rightarrow \begin{pmatrix} -7 & 8 & 4 \\ & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow -7 + 4d = 1$$

$$\Rightarrow 4d = 8$$

$$\Rightarrow d = 2$$